Контрольная работа № 2

Задача. Задача нахождения Гамильтонова цикла в графе (задача коммивояжера). Исходные данные:

$a(1,1)=\infty$ $\quad a(2,1)=53$ $\quad a(3,1)=32$ $\quad a(4,1)=11$ $\quad a(5,1)=22$

$a(1,2)=25$ $\quad a(2,2)=\infty$ $\quad a(3,2)=72$ $\quad a(4,2)=35$ $\quad a(5,2)=63$

$a(1,3)=15$ $\quad a(2,3)=24$ $\quad a(3,3)=\infty$ $\quad a(4,3)=29$ $\quad a(5,3)=34$

$a(1,4)=73$ $\quad a(2,4)=36$ $\quad a(3,4)=88$ $\quad a(4,4)=\infty$ $\quad a(5,4)=16$

$a(1,5)=46$ $\quad a(2,5)=75$ $\quad a(3,5)=24$ $\quad a(4,5)=38$ $\quad a(5,5)=\infty$

Решение.

$$\begin{pmatrix} \infty & 25 & 15 & 73 & 46 \\ 53 & \infty & 24 & 36 & 75 \\ 32 & 72 & \infty & 88 & 24 \\ 11 & 35 & 29 & \infty & 38 \\ 22 & 63 & 34 & 16 & \infty \end{pmatrix}.$$

Определим константы приведения по строкам:

$$\begin{pmatrix} \infty & 25 & 15 & 73 & 46 \\ 53 & \infty & 24 & 36 & 75 \\ 32 & 72 & \infty & 88 & 24 \\ 11 & 35 & 29 & \infty & 38 \\ 22 & 63 & 34 & 16 & \infty \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 15 \\ 24 \\ 24 \\ 11 \\ 16 \end{pmatrix}$$ – минимальные элементы соответствующих строк.

Результат приведения (из каждого элемента строки вычитаем соответствующую константу приведения):

$$\begin{pmatrix} \infty & 10 & 0 & 58 & 31 \\ 29 & \infty & 0 & 12 & 51 \\ 8 & 48 & \infty & 64 & 0 \\ 0 & 24 & 18 & \infty & 27 \\ 6 & 47 & 18 & 0 & \infty \end{pmatrix}.$$

Определим константы приведения по столбцам:

$$\begin{pmatrix} \infty & 10 & 0 & 58 & 31 \\ 29 & \infty & 0 & 12 & 51 \\ 8 & 48 & \infty & 64 & 0 \\ 0 & 24 & 18 & \infty & 27 \\ 6 & 47 & 18 & 0 & \infty \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Результат приведения матрицы:

$$\begin{pmatrix} \infty & 0 & 0 & 58 & 31 \\ 29 & \infty & 0 & 12 & 51 \\ 8 & 38 & \infty & 64 & 0 \\ 0 & 14 & 18 & \infty & 27 \\ 6 & 37 & 18 & 0 & \infty \end{pmatrix}.$$

Сумма констант приведения $\varphi(\Gamma)=15+24+24+11+16+10=100$.

Обозначим эту матрицу через M_1. Найдем в ней самый тяжелый нуль. Для этого запишем эту матрицу еще раз, указывая рядом с каждым нулем в скобках его вес:

$$\begin{pmatrix} \infty & 0\,(14) & 0\,(0) & 58 & 31 \\ 29 & \infty & 0\,(12) & 12 & 51 \\ 8 & 38 & \infty & 64 & 0\,(35) \\ 0\,(20) & 14 & 18 & \infty & 27 \\ 6 & 37 & 18 & 0\,(18) & \infty \end{pmatrix}$$

Самым тяжелым оказывается нуль в клетке $(5,4)$. Следовательно, множество Γ разбивается на $\Gamma_{\{5,4\}}$ (все циклы, проходящие через ребро $(5,4)$) и $\Gamma_{\overline{\{5,4\}}}$ (все циклы, не проходящие через ребро $(5,4)$).

Построим для множества $\Gamma_{\{5,4\}}$ соответствующую ему матрицу и найдем значение оценочной функции:

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \infty & 0 & 0 & 31 \\ 29 & \infty & 0 & 51 \\ 8 & 38 & \infty & 0 \\ 0 & 14 & 18 & \infty \end{pmatrix} \end{array}.$$

Приведем эту матрицу:

$$\begin{pmatrix} \infty & 0 & 0 & 31 \\ 29 & \infty & 0 & 51 \\ 8 & 38 & \infty & 0 \\ 0 & 14 & 18 & \infty \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \infty & 0 & 0 & 31 \\ 29 & \infty & 0 & 51 \\ 8 & 38 & \infty & 0 \\ 0 & 14 & 18 & \infty \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \infty & 0 & 0 & 31 \\ 29 & \infty & 0 & 51 \\ 8 & 38 & \infty & 0 \\ 0 & 14 & 18 & \infty \end{pmatrix} \end{array}.$$

Это матрица $M_{1,1}$; сумма приведения здесь равна 0, поэтому $\varphi_{\{5,4\}}=100+0=0$.

Для $M_{1,2}$ заменяем на ∞ элемент $(5,4)$ в M_1:

$$\begin{pmatrix} \infty & 0 & 0 & 58 & 31 \\ 29 & \infty & 0 & 12 & 51 \\ 8 & 38 & \infty & 64 & 0 \\ 0 & 14 & 18 & \infty & 27 \\ 6 & 37 & 18 & \infty & \infty \end{pmatrix}.$$

После этого приводим полученную матрицу, получим:

$$\begin{pmatrix} \infty & 0 & 0 & 46 & 31 \\ 29 & \infty & 0 & 0 & 51 \\ 8 & 38 & \infty & 52 & 0 \\ 0 & 14 & 18 & \infty & 27 \\ 0 & 31 & 12 & \infty & \infty \end{pmatrix}.$$

Это матрица $M_{1,2}$. Сумма констант последнего приведения равна 18, поэтому
$\varphi_{\{\overline{5,4}\}} = 100 + 18 = 100$.

Так как $\varphi_{\{5,4\}} < \varphi_{\{\overline{5,4}\}}$, то дальнейшей разработке подвергается множество $\Gamma_{\{5,4\}}$.

Найдем самый тяжелый нуль матрицы $M_{1,1}$:

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \infty & 0\,(14) & 0\,(0) & 31 \\ 29 & \infty & 0\,(29) & 51 \\ 8 & 38 & \infty & 0\,(39) \\ 0\,(22) & 14 & 18 & \infty \end{pmatrix} \end{array}.$$

Самым тяжелым оказывается нуль с номером $(3,5)$, так что теперь следует рассматривать множества $\Gamma_{\{5,4\}\{3,5\}}$ и $\Gamma_{\{5,4\}\{\overline{3,5}\}}$.

Построим для множества $\Gamma_{\{5,4\}\{3,5\}}$ соответствующую ему матрицу и найдем значение оценочной функции:

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \infty & 0 & 0 \\ 29 & \infty & 0 \\ 0 & 14 & \infty \end{pmatrix} \end{array}.$$

Приведем эту матрицу:

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \infty & 0 & 0 \\ 29 & \infty & 0 \\ 0 & 14 & \infty \end{pmatrix} \end{array}.$$

Для оценочной функции $\varphi_{\{5,4\}\{3,5\}} = 100 + 0 = 100$.

Матрица для множества $\Gamma_{\{5,4\}\overline{\{3,5\}}}$:

$$\begin{array}{c} \\ 1\\ 2\\ 3\\ 4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 5 \end{array}\\ \begin{pmatrix} \infty & 0 & 0 & 31\\ 29 & \infty & 0 & 51\\ 8 & 38 & \infty & \infty\\ 0 & 14 & 18 & \infty \end{pmatrix} \end{array}.$$

Результат ее приведения:

$$\begin{array}{c} \\ 1\\ 2\\ 3\\ 4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 5 \end{array}\\ \begin{pmatrix} \infty & 0 & 0 & 0\\ 29 & \infty & 0 & 20\\ 0 & 30 & \infty & \infty\\ 0 & 14 & 18 & \infty \end{pmatrix} \end{array}.$$

Для оценочной функции $\varphi_{\{5,4\}\overline{\{3,5\}}} = 100 + 39 = 139$.

Так как $\varphi_{\{5,4\}\{3,5\}} < \varphi_{\{5,4\}\overline{\{3,5\}}}$, то дальнейшей разработке подвергается множество $\Gamma_{\{5,4\}\{3,5\}}$.

Найдем самый тяжелый нуль матрицы множества $\Gamma_{\{5,4\}\{3,5\}}$:

$$\begin{array}{c} \\ 1\\ 2\\ 4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array}\\ \begin{pmatrix} \infty & 0\,(14) & 0\,(0)\\ 29 & \infty & 0\,(29)\\ 0\,(43) & 14 & \infty \end{pmatrix} \end{array}.$$

Самым тяжелым оказывается нуль с номером $(4,1)$, так что теперь следует рассматривать множества $\Gamma_{\{5,4\}\{3,5\}\{4,1\}}$ и $\Gamma_{\{5,4\}\{3,5\}\overline{\{4,1\}}}$.

Построим для множества $\Gamma_{\{5,4\}\{3,5\}\{4,1\}}$ соответствующую ему матрицу и найдем значение оценочной функции:

$$\begin{array}{c} \\ 1\\ 2 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 2 & 3 \end{array}\\ \begin{pmatrix} 0 & \infty\\ \infty & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Приведем эту матрицу:

$$\begin{array}{c} \\ 1\\ 2 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 2 & 3 \end{array}\\ \begin{pmatrix} 0 & \infty\\ \infty & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Для оценочной функции $\varphi_{\{5,4\}\{3,5\}\{4,1\}} = 100 + 0 = 100$.

Матрица для множества $\Gamma_{\{5,4\}\{3,5\}\overline{\{4,1\}}}$:

$$\begin{array}{c} \\ 1\\ 2\\ 4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array}\\ \begin{pmatrix} \infty & 0 & 0\\ 29 & \infty & 0\\ \infty & 14 & \infty \end{pmatrix} \end{array}.$$

Результат ее приведения:

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \infty & 0 & 0 \\ 0 & \infty & 0 \\ \infty & 0 & \infty \end{pmatrix} \end{array}.$$

Для оценочной функции $\varphi_{\{5,\,4\}\{\overline{3,\,5}\}} = 100 + 43 = 143$.

Так как $\varphi_{\{5,\,4\}\{3,\,5\}\{4,\,1\}} < \varphi_{\{5,\,4\}\{3,\,5\}\{\overline{4,\,1}\}}$, то дальнейшей разработке подвергается множество $\Gamma_{\{5,\,4\}\{3,\,5\}\{4,\,1\}}$.

Нулевые клетки матрицы множества $\Gamma_{\{5,\,4\}\{3,\,5\}\{4,\,1\}}$ дают те ребра, которые с найденными ранее составляют обход коммивояжера, причем вес этого обхода равен оценочной функции: 100.
Этот обход: $(5,\,4)(3,\,5)(4,\,1)(1,\,2)(2,\,3)$ или $5 \to 4 \to 1 \to 2 \to 3 \to 5$.