Решение транспортной задачи и задачи динамического программирования

Вариант 1

Задача 1. Найти методами наименьшего элемента и диагональным опорный план и проверить его на оптимальность.

2	9	3	7	8	**18**
6	4	5	12	11	**11**
3	8	12	6	5	**13**
6	**10**	**14**	**3**	**9**	

<u>Решение.</u>

Найдем опорный план методом наименьшего элемента:

6^{2}	^{9}	12^{3}	^{7}	^{8}	**18**
^{6}	10^{4}	1^{5}	^{12}	^{11}	**11**
^{3}	^{8}	1^{12}	3^{6}	9^{5}	**13**
6	**10**	**14**	**3**	**9**	

Получили опорный план $X=\begin{pmatrix} 6 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$.

$$F=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5}c_{ij}x_{ij}=2\cdot 6+3\cdot 12+4\cdot 10+5\cdot 1+12\cdot 1+6\cdot 3+5\cdot 9=168.$$

Найдем опорный план диагональным методом:

6^{2}	10^{9}	2^{3}	^{7}	^{8}	**18**
^{6}	^{4}	11^{5}	^{12}	^{11}	**11**
^{3}	^{8}	1^{12}	3^{6}	9^{5}	**13**
6	**10**	**14**	**3**	**9**	

Получили опорный план $X=\begin{pmatrix} 6 & 10 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$.

$$F=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5}c_{ij}x_{ij}=2\cdot 6+9\cdot 10+3\cdot 2+5\cdot 11+12\cdot 1+6\cdot 3+5\cdot 9=238.$$

Имеем два опорных плана. Так как необходимо найти минимальные транспортные расходы, то будем проверять на оптимальность тот, который минимален, т.е. полученный методом наименьшего элемента.

Составим таблицу. В правом верхнем углу стоимость перевозки c_{ij}. В левом верхнем углу псевдостоимость перевозки $\tilde{c}_{ij}$. В базисных клетках (в заполненных) псевдостоимость равна стоимости. Для остальных клеток псевдостоимость равна сумме $\alpha_i+\beta_j$.

Полагаем, что $\alpha_1=0$. Последовательно находим оставшиеся α_i и β_j так, чтобы для базисных клеток выполнялось равенство: $c_{ij}=\alpha_i+\beta_j$.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	α_i
A_1	2 6 2	2 9	3 12 3	−3 7	−4 8	**18**	**0**
A_2	4 6	4 10 4	5 1 5	−1 12	−2 11	**11**	**2**
A_3	11 3	11 8	12 1 12	6 3 6	5 9 5	**13**	**9**
b_j	**6**	**10**	**14**	**3**	**9**		
β_j	**2**	**2**	**3**	**-3**	**-4**		

Ищем свободные клетки, для которых $\tilde{c}_{ij} > c_{ij}$. Такие клетки есть, значит, данное решение не является оптимальным.

Нашли свободную клетку A_3B_1, для которой $\tilde{c}_{31} > c_{31}$, $11 > 3$. Обозначили цикл синей линией. В найденной свободной клетке ставим знак «+», а в остальных клетках цикла, где линия цикла меняет направление, знаки чередуются по порядку. Переносим по циклу наименьшее число, найденное из клеток цикла, где линия цикла меняет направление и где стоит знак «–». В данном случае, это 1.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	α_i
A_1	2 6 2 –	2 9	3 12 3 +	−3 7	−4 8	**18**	**0**
A_2	4 6	4 10 4	5 1 5	−1 12	−2 11	**11**	**2**
A_3	11 3 +	11 8	12 1 12 –	6 3 6	5 9 5	**13**	**9**
b_j	**6**	**10**	**14**	**3**	**9**		
β_j	**2**	**2**	**3**	**-3**	**-4**		

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	α_i
A_1	2 5 2	2 9	3 13 3	5 7	4 8	**18**	**0**
A_2	4 6	4 10 4	5 1 5	7 12	6 11	**11**	**2**
A_3	3 1 3	3 8	4 12	6 3 6	5 9 5	**13**	**1**
b_j	**6**	**10**	**14**	**3**	**9**		
β_j	**2**	**2**	**3**	**5**	**4**		

Эта таблица соответствует оптимальному плану, т.к. для всех свободных клеток выполняется неравенство $\tilde{c}_{ij} \le c_{ij}$.

Таким образом, оптимальный план $X^* = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 13 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 9 \end{pmatrix}$.

$$F^* = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5} c_{ij}x_{ij} = 2\cdot 5 + 3\cdot 13 + 4\cdot 10 + 5\cdot 1 + 3\cdot 1 + 6\cdot 3 + 5\cdot 9 = 160.$$

Задача 2. Задача динамического программирования.

A	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
1	0.58	0.69	0.43	0.37
2	0.77	0.95	0.86	0.69
3	1.11	1.25	1.39	1.25
4	1.43	1.63	1.83	1.53
5	2.02	2.12	2.36	2.26
6	2.40	2.53	2.86	3.02
7	3.13	3.19	3.41	3.61
8	3.67	3.76	3.88	3.92
9	3.73	3.93	4.21	4.32
10	4.02	3.93	4.35	4.44

Решение.

Обозначим $\varepsilon_0 = 10$ – начальная величина капитала. Уравнение состояний имеет вид $\varepsilon_k = \varepsilon_{k-1} - x_k$, где ε_k – остаток капитала после выделения $k - ому$ району x_k единиц капитала.

$k - ому$ району можно выделить любое количество из имеющихся ε_{k-1} единиц ресурса, т.е. $0 \le x_k \le \varepsilon_{k-1}$.

Функциональное уравнение Беллмана будет иметь вид $F_k^*(\varepsilon_{k-1}) = \max\limits_{0 \le x_k \le \varepsilon_{k-1}} \left[f_k(x_k) + f_{k+1}^*(\varepsilon_k) \right]$.

Проведем условную оптимизацию.

При $k = 4$ $F_4^*(\varepsilon_3) = \max\limits_{0 \le x_4 \le \varepsilon_3} \left[f_4(x_4) \right]$, получим таблицу:

ε_3	x_4	$\varepsilon_4 = \varepsilon_3 - x_4$	$f_4(x_4)$	$F_4^*(\varepsilon_3)$	$x_4^*(\varepsilon_3)$
1	0	1	0	0.37	1
	1	0	0.37		
2	0	2	0	0.69	2
	1	1	0.37		
	2	0	0.69		
3	0	3	0	1.25	3
	1	2	0.37		
	2	1	0.69		
	3	0	1.25		
4	0	4	0	1.53	4
	1	3	0.37		
	2	2	0.69		
	3	1	1.25		
	4	0	1.53		
5	0	5	0	2.26	5
	1	4	0.37		
	2	3	0.69		
	3	2	1.25		
	4	1	1.53		
	5	0	2.26		
6	0	6	0	3.02	6
	1	5	0.37		
	2	4	0.69		
	3	3	1.25		

	4	2	1.53		
	5	1	2.26		
	6	0	3.02		
7	0	7	0	3.61	7
	1	6	0.37		
	2	5	0.69		
	3	4	1.25		
	4	3	1.53		
	5	2	2.26		
	6	1	3.02		
	7	0	3.61		
8	0	8	0	3.92	8
	1	7	0.37		
	2	6	0.69		
	3	5	1.25		
	4	4	1.53		
	5	3	2.26		
	6	2	3.02		
	7	1	3.61		
	8	0	3.92		
9	0	9	0	4.32	9
	1	8	0.37		
	2	7	0.69		
	3	6	1.25		
	4	5	1.53		
	5	4	2.26		
	6	3	3.02		
	7	2	3.61		
	8	1	3.92		
	9	0	4.32		
10	0	10	0	4.44	10
	1	9	0.37		
	2	8	0.69		
	3	7	1.25		
	4	6	1.53		
	5	5	2.26		
	6	4	3.02		
	7	3	3.61		
	8	2	3.92		
	9	1	4.32		
	10	0	4.44		

При $k=3$ $F_3^*(\varepsilon_2)=\max\limits_{0\le x_3\le\varepsilon_2}\left[f_3(x_3)+F_4^*(\varepsilon_3)\right]$, получим таблицу:

ε_2	x_3	$\varepsilon_3=\varepsilon_2-x_3$	$f_3(x_3)$	$F_4^*(\varepsilon_3)$	$F_3(\varepsilon_2,x_3)$	$F_3^*(\varepsilon_2)$	$x_3^*(\varepsilon_2)$
1	0	1	0	0.37	0.37	0.43	1
	1	0	0.43	0	0.43		
2	0	2	0	0.69	0.69	0.86	2
	1	1	0.43	0.37	0.80		
	2	0	0.86	0	0.86		
3	0	3	0	1.25	1.25	1.39	3

	1	2	0.43	0.69	1.12		
	2	1	0.86	0.37	1.23		
	3	0	1.39	0	1.39		
4	0	4	0	1.53	1.53	1.83	4
	1	3	0.43	1.25	1.68		
	2	2	0.86	0.69	1.55		
	3	1	1.39	0.37	1.76		
	4	0	1.83	0	1.83		
5	0	5	0	2.26	2.26	2.36	5
	1	4	0.43	1.53	1.96		
	2	3	0.86	1.25	2.11		
	3	2	1.39	0.69	2.08		
	4	1	1.83	0.37	2.20		
	5	0	2.36	0	2.36		
6	0	6	0	3.02	3.02	3.02	0
	1	5	0.43	2.26	2.69		
	2	4	0.86	1.53	2.39		
	3	3	1.39	1.25	2.64		
	4	2	1.83	0.69	2.52		
	5	1	2.36	0.37	2.73		
	6	0	2.86	0	2.86		
7	0	7	0	3.61	3.61	3.61	0
	1	6	0.43	3.02	3.45		
	2	5	0.86	2.26	3.12		
	3	4	1.39	1.53	2.92		
	4	3	1.83	1.25	3.08		
	5	2	2.36	0.69	3.05		
	6	1	2.86	0.37	3.23		
	7	0	3.41	0	3.41		
8	0	8	0	3.92	3.92	4.04	1
	1	7	0.43	3.61	4.04		
	2	6	0.86	3.02	3.88		
	3	5	1.39	2.26	3.65		
	4	4	1.83	1.53	3.36		
	5	3	2.36	1.25	3.61		
	6	2	2.86	0.69	3.55		
	7	1	3.41	0.37	3.78		
	8	0	3.88	0	3.88		
9	0	9	0	4.32	4.32	4.47	2
	1	8	0.43	3.92	4.35		
	2	7	0.86	3.61	4.47		
	3	6	1.39	3.02	4.41		
	4	5	1.83	2.26	4.09		
	5	4	2.36	1.53	3.89		
	6	3	2.86	1.25	4.11		
	7	2	3.41	0.69	4.10		
	8	1	3.88	0.37	4.25		
	9	0	4.21	0	4.21		
10	0	10	0	4.44	4.44	5.00	3
	1	9	0.43	4.32	4.75		
	2	8	0.86	3.92	4.78		

	3	7	1.39	3.61	5.00		
	4	6	1.83	3.02	4.85		
	5	5	2.36	2.26	4.62		
	6	4	2.86	1.53	4.39		
	7	3	3.41	1.25	4.66		
	8	2	3.88	0.69	4.57		
	9	1	4.21	0.37	4.58		
	10	0	4.35	0	4.35		

При $k=2$ $F_2^*(\varepsilon_1)=\max\limits_{0\le x_2\le\varepsilon_1}\left[f_2(x_2)+F_3^*(\varepsilon_2)\right]$, получим таблицу:

ε_1	x_2	$\varepsilon_2=\varepsilon_1-x_2$	$f_2(x_2)$	$F_3^*(\varepsilon_2)$	$F_2(\varepsilon_1,x_2)$	$F_2^*(\varepsilon_1)$	$x_2^*(\varepsilon_1)$
1	0	1	0	0.43	0.43	0.69	1
	1	0	0.69	0	0.69		
2	0	2	0	0.86	0.86	1.12	1
	1	1	0.69	0.43	1.12		
	2	0	0.95	0	0.95		
3	0	3	0	1.39	1.39	1.55	1
	1	2	0.69	0.86	1.55		
	2	1	0.95	0.43	1.38		
	3	0	1.25	0	1.25		
4	0	4	0	1.83	1.83	2.08	1
	1	3	0.69	1.39	2.08		
	2	2	0.95	0.86	1.81		
	3	1	1.25	0.43	1.68		
	4	0	1.63	0	1.63		
5	0	5	0	2.36	2.36	2.52	1
	1	4	0.69	1.83	2.52		
	2	3	0.95	1.39	2.34		
	3	2	1.25	0.86	2.11		
	4	1	1.63	0.43	2.06		
	5	0	2.12	0	2.12		
6	0	6	0	3.02	3.02	3.05	1
	1	5	0.69	2.36	3.05		
	2	4	0.95	1.83	2.78		
	3	3	1.25	1.39	2.64		
	4	2	1.63	0.86	2.49		
	5	1	2.12	0.43	2.55		
	6	0	2.53	0	2.53		
7	0	7	0	3.61	3.61	3.71	1
	1	6	0.69	3.02	3.71		
	2	5	0.95	2.36	3.31		
	3	4	1.25	1.83	3.08		
	4	3	1.63	1.39	3.02		
	5	2	2.12	0.86	2.98		
	6	1	2.53	0.43	2.96		
	7	0	3.19	0	3.19		
8	0	8	0	4.04	4.04	4.30	1
	1	7	0.69	3.61	4.30		
	2	6	0.95	3.02	3.97		
	3	5	1.25	2.36	3.61		

	4	4	1.63	1.83	3.46		
	5	3	2.12	1.39	3.51		
	6	2	2.53	0.86	3.39		
	7	1	3.19	0.43	3.62		
	8	0	3.76	0	3.76		
9	0	9	0	4.47	4.47	4.73	1
	1	8	0.69	4.04	4.73		
	2	7	0.95	3.61	4.56		
	3	6	1.25	3.02	4.27		
	4	5	1.63	2.36	3.99		
	5	4	2.12	1.83	3.95		
	6	3	2.53	1.39	3.92		
	7	2	3.19	0.86	4.05		
	8	1	3.76	0.43	4.19		
	9	0	3.93	0	3.93		
10	0	10	0	5.00	5.00	5.16	1
	1	9	0.69	4.47	5.16		
	2	8	0.95	4.04	4.99		
	3	7	1.25	3.61	4.86		
	4	6	1.63	3.02	4.65		
	5	5	2.12	2.36	4.48		
	6	4	2.53	1.83	4.36		
	7	3	3.19	1.39	4.58		
	8	2	3.76	0.86	4.62		
	9	1	3.93	0.43	4.36		
	10	0	3.93	0	3.93		

При $k=1$ $F_1^*(\varepsilon_0)=\max\limits_{0\le x_1\le\varepsilon_0}\left[f_1(x_1)+F_2^*(\varepsilon_1)\right]$, получим таблицу:

ε_0	x_1	$\varepsilon_1=\varepsilon_0-x_1$	$f_1(x_1)$	$F_2^*(\varepsilon_1)$	$F_1(\varepsilon_0,x_1)$	$F_1^*(\varepsilon_0)$	$x_1^*(\varepsilon_0)$
10	0	10	0	5.16	5.16	5.31	1
	1	9	0.58	4.73	5.31		
	2	8	0.77	4.30	5.07		
	3	7	1.11	3.71	4.82		
	4	6	1.43	3.05	4.48		
	5	5	2.02	2.52	4.54		
	6	4	2.40	2.08	4.48		
	7	3	3.13	1.55	4.68		
	8	2	3.67	1.12	4.79		
	9	1	3.73	0.69	4.42		
	10	0	4.02	0	4.02		

Из последней таблицы получаем $F_1^*(\varepsilon_0)=5.31$, $x_1^*(\varepsilon_0)=1$, $\varepsilon_1=9$.

Из таблицы при $k=2$ для $\varepsilon_1=9$ получаем $x_2^*(\varepsilon_1)=1$, $\varepsilon_2=8$.

Из таблицы при $k=3$ для $\varepsilon_2=8$ получаем $x_3^*(\varepsilon_2)=1$, $\varepsilon_3=7$.

Из таблицы при $k=4$ для $\varepsilon_3=7$ получаем $x_4^*(\varepsilon_3)=7$, $\varepsilon_4=0$.

Таким образом, оптимальное распределение капитала: $x_1^*=1$, $x_2^*=1$, $x_3^*=1$, $x_4^*=7$ даст прибыль равную $F_{\max}=5.31$.