Оптимальные задачи на графах

Вариант 6

Задача 1. Нахождение кратчайшего пути в графе.
$(X_1, X_2) = 3$, $(X_4, X_9) = 3$,
$(X_1, X_4) = 5$, $(X_4, X_{10}) = 4$,
$(X_1, X_5) = 8$, $(X_5, X_7) = 5$,
$(X_2, X_6) = 4$, $(X_5, X_8) = 6$,
$(X_2, X_7) = 6$, $(X_6, X_7) = 3$,
$(X_2, X_8) = 7$, $(X_6, X_{10}) = 5$,
$(X_3, X_5) = 9$, $(X_6, X_8) = 3$,
$(X_3, X_7) = 5$, $(X_7, X_{10}) = 9$,
$(X_3, X_8) = 4$, $(X_8, X_9) = 4$,
$(X_4, X_5) = 5$, $(X_8, X_{10}) = 5$,
$(X_4, X_8) = 6$, $(X_9, X_{10}) = 6$.

Решение.

Воспользуемся алгоритмом Дейкстры. Постоянные пометки будем обозначать знаком «*», а остальные рассматривать как временные.
1. Начальная вершина X_1, значит, пометка $l(X_1) = 0^*$, $l(X_2) = \ldots = l(X_{10}) = \infty$.
Первая итерация.
2. Для соседних вершин с X_1 найдем $l(X_i) = \min(l(X_i), l(X_1) + c(X_1, X_i))$:
$l(X_2) = \min(\infty, 0^* + 3) = 3$, $l(X_4) = \min(\infty, 0^* + 5) = 5$, $l(X_5) = \min(\infty, 0^* + 8) = 8$.
3. Найдем минимальную пометку из всех временных: $\min(3, 5, 8) = 3$, т.е. возьмем X_2.
4. X_2 получает пометку $l(X_2) = 3^*$.
5. Т.к. не все вершины графа имеют постоянные пометки, то повторяем алгоритм для X_2.
Вторая итерация.
2. Для соседних вершин с X_2 найдем $l(X_i) = \min(l(X_i), l(X_2) + c(X_2, X_i))$:
$l(X_6) = \min(\infty, 3^* + 4) = 7$, $l(X_7) = \min(\infty, 3^* + 6) = 9$, $l(X_8) = \min(\infty, 3^* + 7) = 10$.
3. Найдем минимальную пометку из всех временных: $\min(5, 8, 7, 9, 10) = 5$, т.е. возьмем X_4.
4. X_4 получает пометку $l(X_4) = 5^*$.
5. Т.к. не все вершины графа имеют постоянные пометки, то повторяем алгоритм для X_4.
Третья итерация.
2. Для соседних вершин с X_4 найдем $l(X_i) = \min(l(X_i), l(X_4) + c(X_4, X_i))$:
$l(X_5) = \min(8, 5^* + 5) = 8$, $l(X_8) = \min(10, 5^* + 6) = 10$, $l(X_9) = \min(\infty, 5^* + 3) = 8$,
$l(X_{10}) = \min(\infty, 5^* + 4) = 9$.
3. Найдем минимальную пометку из всех временных: $\min(8, 7, 9, 10, 8, 9) = 7$, т.е. возьмем X_6.
4. X_6 получает пометку $l(X_6) = 7^*$.

5. Т.к. не все вершины графа имеют постоянные пометки, то повторяем алгоритм для X_6.
Четвертая итерация.
2. Для соседних вершин с X_6 найдем $l(X_i) = \min(l(X_i), l(X_6) + c(X_6, X_i))$:
$l(X_7) = \min(9, 7^* + 3) = 9$, $l(X_8) = \min(10, 7^* + 3) = 10$, $l(X_{10}) = \min(9, 7^* + 5) = 9$.
3. Найдем минимальную пометку из всех временных: $\min(8, 9, 10, 8, 9) = 8$, возьмем X_5.
4. X_5 получает пометку $l(X_5) = 8^*$.
5. Т.к. не все вершины графа имеют постоянные пометки, то повторяем алгоритм для X_5.
Пятая итерация.
2. Для соседних вершин с X_5 найдем $l(X_i) = \min(l(X_i), l(X_5) + c(X_5, X_i))$:
$l(X_3) = \min(\infty, 8^* + 9) = 17$, $l(X_7) = \min(9, 8^* + 5) = 9$, $l(X_8) = \min(10, 8^* + 6) = 10$.
3. Найдем минимальную пометку из всех временных: $\min(9, 10, 8, 9, 17) = 8$, т.е. возьмем X_9.
4. X_9 получает пометку $l(X_9) = 8^*$.
5. Т.к. не все вершины графа имеют постоянные пометки, то повторяем алгоритм для X_9.
Шестая итерация.
2. Для соседних вершин с X_9 найдем $l(X_i) = \min(l(X_i), l(X_9) + c(X_9, X_i))$:
$l(X_8) = \min(10, 8^* + 4) = 10$, $l(X_{10}) = \min(9, 8^* + 6) = 9$.
3. Найдем минимальную пометку из всех временных: $\min(9, 10, 9, 17) = 9$, возьмем X_7.
4. X_7 получает пометку $l(X_7) = 9^*$.
5. Т.к. не все вершины графа имеют постоянные пометки, то повторяем алгоритм для X_7.
Седьмая итерация.
2. Для соседних вершин с X_7 найдем $l(X_i) = \min(l(X_i), l(X_7) + c(X_7, X_i))$:
$l(X_3) = \min(17, 9^* + 5) = 14$, $l(X_{10}) = \min(9, 9^* + 9) = 9$.
3. Найдем минимальную пометку из всех временных: $\min(10, 9, 14) = 9$, т.е. возьмем X_{10}.
4. X_{10} получает пометку $l(X_{10}) = 9^*$.
5. Т.к. не все вершины графа имеют постоянные пометки, то повторяем алгоритм для X_{10}.
Восьмая итерация.
2. Для соседних вершин с X_{10} найдем $l(X_i) = \min(l(X_i), l(X_{10}) + c(X_{10}, X_i))$:
$l(X_8) = \min(10, 9^* + 5) = 10$.
3. Найдем минимальную пометку из всех временных: $\min(10, 14) = 10$, т.е. возьмем X_8.
4. X_8 получает пометку $l(X_8) = 10^*$.
5. Т.к. не все вершины графа имеют постоянные пометки, то повторяем алгоритм для X_8.
Девятая итерация.
2. Для соседних вершин с X_8 найдем $l(X_i) = \min(l(X_i), l(X_8) + c(X_8, X_i))$:
$l(X_3) = \min(14, 10^* + 4) = 14$.
3. Найдем минимальную пометку из всех временных: $\min(14) = 14$, т.е. возьмем X_3.
4. X_3 получает пометку $l(X_3) = 14^*$.
5. Т.к. все вершины графа имеют постоянные пометки, то конец алгоритма.

Задача 2. Определить максимальный поток из P_0 в P_7.

	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_0		8		12	10	0		10
P_1	18		14	15	11			
P_2		13		19			18	
P_3	0	16	12				0	
P_4	14	18						13
P_5	15						15	
P_6			14	16		16		14
P_7	12				0		12	

<u>Решение.</u>

Выберем произвольно один из возможных путей из P_0 в P_7. Например, $P_0 \to P_7$.
Элемент $(0, 7)$ отмечаем знаком «–», а $(7, 0)$ – знаком «+». Пропускная способность этого пути $X_1 = (0, 7) = 10$.

	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_0		8		12	10	0		10–
P_1	18		14	15	11			
P_2		13		19			18	
P_3	0	16	12				0	
P_4	14	18						13
P_5	15						15	
P_6			14	16		16		14
P_7	12+				0		12	

Вычитаем X_1 из ячеек со знаком «–» и прибавляем к ячейкам со знаком «+».
Выбираем новый путь из P_0 в P_7. Например, $P_0 \to P_4 \to P_7$.
Элементы $(0, 4)$, $(4, 7)$ отмечаем знаком «–», а $(4, 0)$, $(7, 4)$ – знаком «+». Пропускная способность этого пути $X_2 = \min\{(0, 4), (4, 7)\} = \min\{10, 13\} = 10$.

	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_0		8		12	10–	0		0
P_1	18		14	15	11			
P_2		13		19			18	
P_3	0	16	12				0	
P_4	14+	18						13–
P_5	15						15	
P_6			14	16		16		14
P_7	22				0+		12	

Вычитаем X_2 из ячеек со знаком «–» и прибавляем к ячейкам со знаком «+».
Выбираем новый путь из P_0 в P_7. Например, $P_0 \to P_1 \to P_2 \to P_6 \to P_7$.

Элементы $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,6)$, $(6,7)$ отмечаем знаком «–», а $(1,0)$, $(2,1)$, $(6,2)$, $(7,6)$ – знаком «+». Пропускная способность этого пути
$X_3 = \min\{(0,1),(1,2),(2,6),(6,7)\} = \min\{8, 14, 18, 14\} = 8$.

	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_0		8–		12	0	0		0
P_1	18+		14–	15	11			
P_2		13+		19			18–	
P_3	0	16	12				0	
P_4	24	18						3
P_5	15						15	
P_6			14+	16		16		14–
P_7	22				10		12+	

Вычитаем X_3 из ячеек со знаком «–» и прибавляем к ячейкам со знаком «+».
Выбираем новый путь из P_0 в P_7. Например, $P_0 \to P_3 \to P_2 \to P_6 \to P_7$.
Элементы $(0,3)$, $(3,2)$, $(2,6)$, $(6,7)$ отмечаем знаком «–», а $(3,0)$, $(2,3)$, $(6,2)$, $(7,6)$ – знаком «+». Пропускная способность этого пути
$X_4 = \min\{(0,3),(3,2),(2,6),(6,7)\} = \min\{12, 12, 10, 6\} = 6$.

	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_0		0		12–	0	0		0
P_1	26		6	15	11			
P_2		21		19+			10–	
P_3	0+	16	12–				0	
P_4	24	18						3
P_5	15						15	
P_6			22+	16		16		6–
P_7	22				10		20+	

Вычитаем X_4 из ячеек со знаком «–» и прибавляем к ячейкам со знаком «+».
Выбираем новый путь из P_0 в P_7. Например, $P_0 \to P_3 \to P_1 \to P_4 \to P_7$.
Элементы $(0,3)$, $(3,1)$, $(1,4)$, $(4,7)$ отмечаем знаком «–», а $(3,0)$, $(1,3)$, $(4,1)$, $(7,4)$ – знаком «+». Пропускная способность этого пути
$X_5 = \min\{(0,3),(3,1),(1,4),(4,7)\} = \min\{6, 16, 11, 3\} = 3$.

	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_0		0		6–	0	0		0
P_1	26		6	15+	11–			
P_2		21		25			4	
P_3	6+	16–	6				0	
P_4	24	18+						3–
P_5	15						15	
P_6			28	16		16		0
P_7	22				10+		26	

Вычитаем X_5 из ячеек со знаком «–» и прибавляем к ячейкам со знаком «+».

	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_0		0		3	0	0		0
P_1	26		6	18	8			
P_2		21		25			4	
P_3	9	13	6				0	
P_4	24	21						0
P_5	15						15	
P_6			28	16		16		0
P_7	22				13		26	

В столбце P_7 только нули. Вычитая из элементов первой таблицы элементы последней, получаем итоговую таблицу со значениями (i, j), определяющими максимально возможный поток:

	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_0		8		9	10	0		10
P_1	–8		8	–3	3			
P_2		–8		–6			14	
P_3	–9	13	6				0	
P_4	–10	–3						13
P_5	0						0	
P_6			–14	0		0		14
P_7	–10				–13		–14	

Максимальный поток равен $v = (0, 1) + (0, 3) + (0, 4) + (0, 7) = 8 + 9 + 10 + 10 = 37$.