

Дано:

$$L = 20 \text{ мГн}$$

$$C = 1 \text{ мкФ}$$

$$T = 1,67 \text{ мс}$$

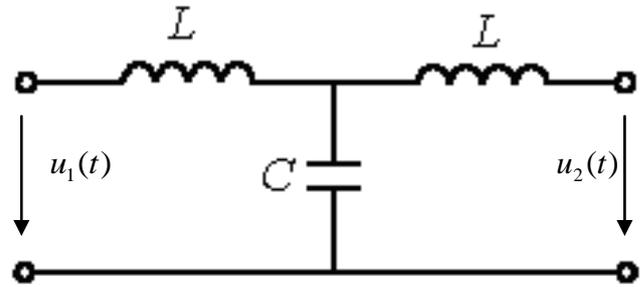


Рис. Схема простейшего **низкочастотного фильтра (ФНЧ)**, собранного по симметричной Т-образной схеме.

Решение:**1) Определим значения граничных частот полосы прозрачности фильтра (частот среза)**

Электрическим фильтром называется четырехполюсник, устанавливаемый между источником питания и нагрузкой и служащий для беспрепятственного (с малым затуханием) пропускания токов одних частот и задержки (или пропускания с большим затуханием) токов других частот.

Диапазон частот, пропускаемых фильтром без затухания (с малым затуханием), называется **полосой пропускания** или **полосой прозрачности**; диапазон частот, пропускаемых с большим затуханием, называется **полосой затухания** или **полосой задерживания**. Качество фильтра считается тем выше, чем ярче выражены его фильтрующие свойства, т.е. чем сильнее возрастает затухание в полосе задерживания.

В качестве пассивных фильтров обычно применяются четырехполюсники на основе катушек индуктивности и конденсаторов. Возможно также применение пассивных RC-фильтров, используемых при больших сопротивлениях нагрузки.

Для упрощения анализа будем считать, что фильтры составлены из идеальных катушек индуктивности и конденсаторов, т.е. элементов соответственно с нулевыми активными сопротивлениями и проводимостью. Это допущение достаточно корректно при высоких частотах, когда индуктивные сопротивления катушек много больше их активных сопротивлений ($\omega L \gg R_L$), а емкостные проводимости конденсаторов много больше их активных проводимостей ($\omega C \gg g_C$).

Фильтрующие свойства четырехполюсников обусловлены возникающими в них резонансными режимами – резонансами токов и напряжений. Фильтры обычно собираются по симметричной Т- или П-образной схеме, т.е. при $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2$ или $\underline{Z}'_1 = \underline{Z}'_2$

Если фильтр имеет нагрузку, сопротивление которой при всех частотах равно характеристическому, то напряжения и соответственно токи на его входе и выходе связаны соотношением

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = e^\gamma = e^{\alpha + j\beta} = e^\alpha e^{j\beta} \quad (1)$$

В идеальном случае в полосе пропускания (прозрачности) $\alpha = 0$, т.е. в соответствии с (1), $U_1 = U_2$, $I_1 = I_2$ и $\varphi_1 = \varphi_2$. Следовательно, справедливо и равенство $P_1 = P_2$, которое указывает на отсутствие потерь в идеальном фильтре, а значит, идеальный фильтр должен быть реализован на основе идеальных катушек индуктивности и конденсаторов. Вне области пропускания (в полосе затухания) в идеальном случае $\alpha = \infty$, т.е. $U_2 = 0$ и $I_2 = 0$.

Связь коэффициентов четырехполюсника с параметрами элементов T-образной схемы замещения определяется соотношениями:

$$\underline{A} = 1 + \underline{Z}_1 / \underline{Z}_3; \quad \underline{B} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 / \underline{Z}_3; \quad \underline{C} = 1 / \underline{Z}_3; \quad \underline{D} = 1 + \underline{Z}_2 / \underline{Z}_3$$

или конкретно для данного фильтра:

$$\underline{A} = \underline{D} = 1 + \frac{j\omega L}{1/j\omega C} = 1 - \omega^2 LC \quad (2)$$

$$\underline{B} = 2j\omega L + \frac{(j\omega L)^2}{1/j\omega C} = 2j\omega L - j\omega^3 L^2 C \quad (3)$$

$$\underline{C} = \frac{1}{1/j\omega C} = j\omega C \quad (4)$$

Из уравнений четырехполюсника, записанных с использованием гиперболических функций, вытекает, что

$$\underline{A} = ch\gamma = ch(\alpha + \beta) = ch\alpha \cos \beta + jsh\alpha \sin \beta$$

Однако в соответствии с (2) \underline{A} - вещественная переменная, а следовательно,

$$\underline{A} = ch\alpha \cos \beta = 1 - \omega^2 LC \quad (5)$$

Поскольку в полосе пропускания частот коэффициент затухания $\alpha = 0$, то на основании (5) $\cos \beta = 1 - \omega^2 LC$

Так как пределы изменения $\cos \beta$:

$$-1 \leq \cos \beta \leq 1$$

,то границы полосы пропускания определяются неравенством $-1 \leq 1 - \omega^2 LC \leq 1$, которому удовлетворяют частоты, лежащие в диапазоне:

$$0 \leq \omega \leq \sqrt{\frac{2}{LC}} = \sqrt{\frac{2}{20 \times 10^{-3} \cdot 1 \times 10^{-6}}} = 10000 \frac{\text{рад}}{\text{с}} \quad (6)$$

Для характеристического сопротивления фильтра на основании (3) и (4) имеем

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{\underline{B}}{\underline{C}}} = \sqrt{\frac{2j\omega L - j\omega^3 L^2 C}{j\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C} (2 - \omega^2 LC)} \quad (7)$$

Анализ соотношения (7) показывает, что с ростом частоты ω в пределах, определяемых неравенством (6), характеристическое сопротивление фильтра уменьшается до нуля, оставаясь активным. Поскольку, при нагрузке фильтра сопротивлением, равным характеристическому, его входное сопротивление также будет равно \underline{Z}_c , то, вследствие вещественности \underline{Z}_c , можно сделать заключение, что фильтр работает в режиме резонанса, что было отмечено ранее. При

частотах, больших $\sqrt{\frac{2}{LC}} = \sqrt{\frac{2}{20 \times 10^{-3} \cdot 1 \times 10^{-6}}} = 10000 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$

,как это следует из (7), характеристическое сопротивление приобретает индуктивный характер.

2) Качественно построим графики зависимости характеристического сопротивления Z_c , постоянной ослабления α (коэффициента затухания) и постоянной фазы β (коэффициента фазы) в функции частоты ω .

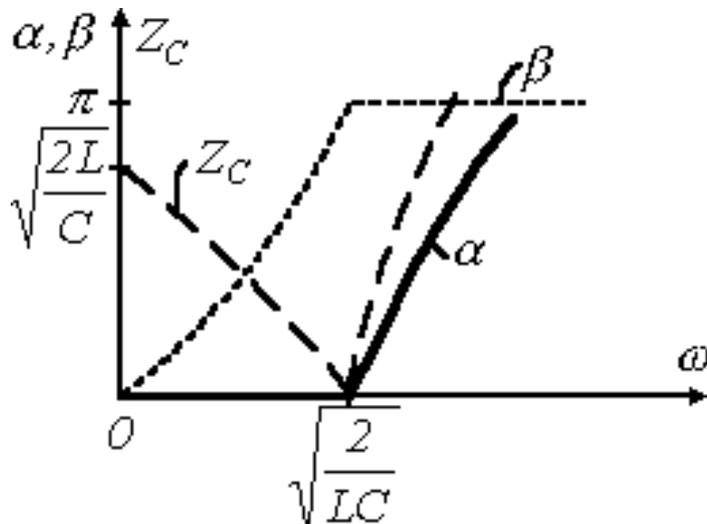


Рис.2. качественные зависимости $\alpha(\omega)$, $\beta(\omega)$ и $Z_c(\omega)$.

Следует отметить, что вне полосы пропускания $\beta = \pi$

Действительно, поскольку коэффициент A – вещественный, то всегда должно удовлетворяться равенство:

$$\operatorname{sh} \alpha \sin \beta = 0 \tag{8}$$

Так как вне полосы прозрачности $\alpha \neq 0$, то соотношение (8) может выполняться только при $\sin \beta = 0$

В полосе задерживания коэффициент затухания α определяется из уравнения (5) при $\beta = \pi$. Существенным при этом является факт постепенного нарастания α , т.е. в полосе затухания фильтр не является идеальным. Аналогичный вывод о неидеальности реального фильтра можно сделать и для полосы прозрачности, поскольку обеспечить практически согласованный режим работы фильтра во всей полосе прозрачности невозможно, а следовательно, в полосе пропускания коэффициент затухания α будет отличен от нуля.

3) На вход данного ФНЧ подадим напряжение 1-й гармоники из задачи 2.3. Определим числовые значения постоянной передачи $\gamma = \alpha + j\beta$, характеристического сопротивления Z_C , напряжений и токов во всех ветвях схемы и построим по ним векторную диаграмму токов и напряжений

из п.1 задачи 2.3. для 1-й гармоники: $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1,67 \times 10^{-3}} \approx 3762,39 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$

т.к. значение частоты ω лежит в полосе пропускания ФНЧ, то $\alpha = 0$

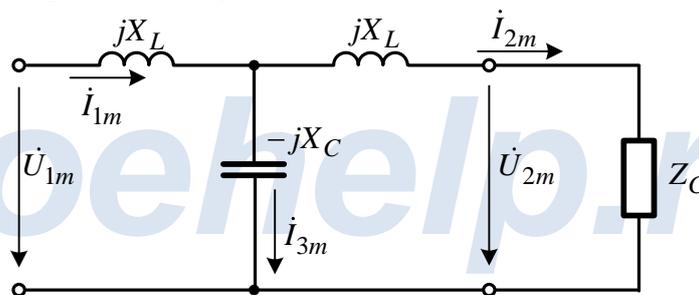
$$\cos \beta = 1 - \omega^2 LC = 1 - 3762,39^2 \cdot 0,02 \cdot 1 \times 10^{-6} \approx 0,716888$$

$$\Rightarrow \beta = \arccos(0,716888) \approx 44,2^\circ$$

Характеристическое сопротивление:

$$Z_C = \sqrt{\frac{L}{C}(2 - \omega^2 LC)} = \sqrt{\frac{0,02}{1 \times 10^{-6}}(2 - 3762,39^2 \cdot 0,02 \cdot 1 \times 10^{-6})} \approx 185,305 \text{ Ом}$$

Определим напряжения и токи во всех ветвях схемы:



Из задачи 2.3:

$$X_L = 75,248 \text{ Ом}$$

$$X_C = 265,789 \text{ Ом}$$

$$\dot{U}_{1m} = \frac{4 \cdot 80}{3 \cdot \pi} \approx 33,953 \text{ В}$$

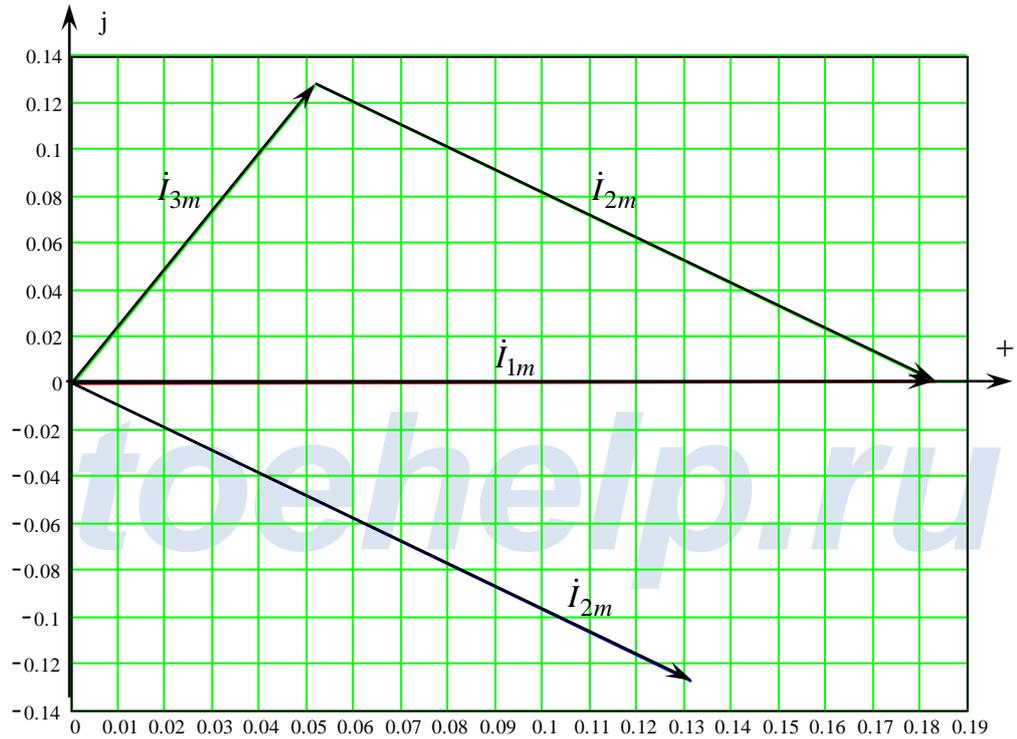
Составим систему уравнений используя 1-й и 2-й законы Кирхгофа:

$$\begin{cases} \dot{I}_{1m} - \dot{I}_{2m} - \dot{I}_{3m} = 0 \\ jX_L \dot{I}_{1m} - jX_C \dot{I}_{3m} = \dot{U}_{1m} \\ (Z_C + jX_L) \dot{I}_{1m} + jX_C \dot{I}_{3m} = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \dot{I}_{1m} - \dot{I}_{2m} - \dot{I}_{3m} = 0 \\ j75,248 \cdot \dot{I}_{1m} - j265,789 \cdot \dot{I}_{3m} = 33,953 \\ (185,305 + j75,248) \dot{I}_{1m} + j265,789 \cdot \dot{I}_{3m} = 0 \end{cases}$$

Решая данную систему находим токи в ветвях:

$$\begin{cases} \dot{I}_{1m} \approx 0,1833 \text{ А} \\ \dot{I}_{2m} \approx (0,1314 - j0,1277) \approx 0,1832 e^{-j44,18^\circ} \text{ А} \\ \dot{I}_{3m} \approx (0,0519 + j0,1277) \approx 0,1378 e^{j67,88^\circ} \text{ А} \end{cases}$$

Векторная диаграмма токов:



Векторная диаграмма напряжений:

