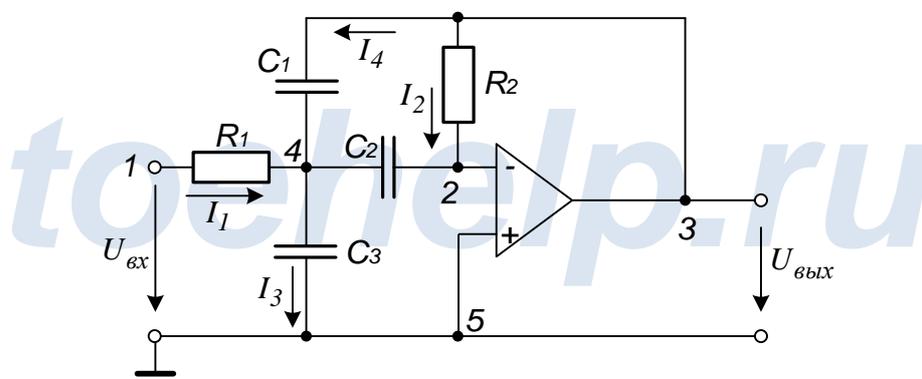


Для RC-цепи с операционным усилителем получить выражение передаточной функции $H(p) = U_{\text{вых}}(p)/U_{\text{вх}}(p) = (p^n + b_{n-1}p^{n-1} + \dots + b_0)/(p^m + a_{m-1}p^{m-1} + \dots + a_0)$

И построить её амплитудно-частотную характеристику для $\omega=0; 0,5\omega_0; \omega_0; 2\omega_0; 3\omega_0$; где $\omega_0 = \sqrt{a_0}$. При анализе полагать, что операционный усилитель идеальный, т.е. коэффициент усиления и входное сопротивление его $\rightarrow \infty$, а входное напряжение и выходное сопротивление $\rightarrow 0$.

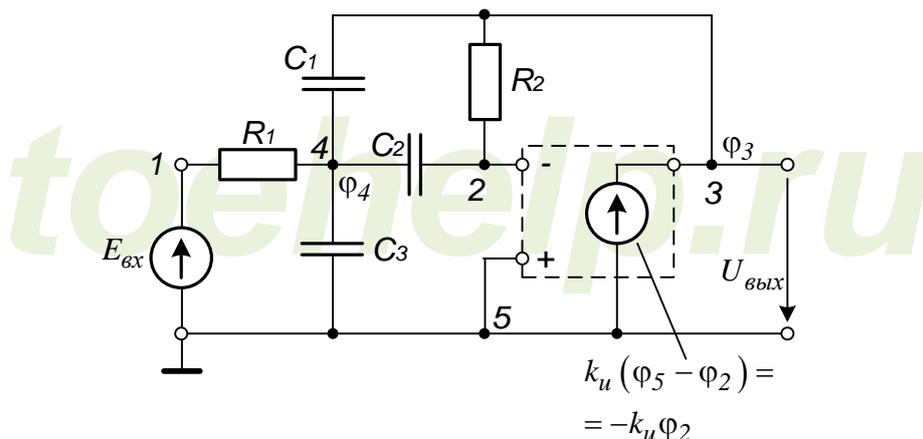
Числовые значения параметров указаны в таблице

$R_1,$ кОм	$R_2,$ кОм	$R_3,$ кОм	$R_4,$ кОм	$R_5,$ кОм	$C_1,$ мкФ	$C_2,$ мкФ	$C_3,$ мкФ
0.1	1	-	-	-	1	1	10,8



Решение:

Исходную схему преобразуем в эквивалентную операторную схему замещения. В этой схеме ОУ представлен источником ЭДС, управляемым разностью входных напряжений. Токи входных электродов отсутствуют в предположении, что входное сопротивление бесконечно велико.



На эквивалентной схеме потенциалы узлов $\varphi(t)$, ЭДС источника $e_{\text{вх}}(t)$, выходное напряжение $u_{\text{вых}}(t)$ и проводимости ветвей представлены соответствующими им изображениями по Лапласу $\varphi(p)$, $E_{\text{вх}}(p)$, $U_{\text{вых}}(p)$ и $Y(p)$, где $p = s + j\omega$ - комплексная

переменная. Далее, где возможно, будем изображения функций записывать компактно φ , $E_{\text{вх}}$, $U_{\text{вых}}$ и Y , опуская их зависимость от переменной p .

В цепи три независимых узла; потенциал нижнего узла полагаем равным нулю ($\varphi_5 = 0$). Система должна состоять из 3-х уравнений – два уравнения для потенциалов узлов пассивной части цепи, третье уравнение – математическая модель идеализированного ОУ.

$$\begin{cases} Y_{11}\varphi_4 - Y_{12}\varphi_2 - Y_{13}\varphi_3 = I_{11} \\ -Y_{21}\varphi_4 + Y_{22}\varphi_2 - Y_{23}\varphi_3 = I_{22} \\ -k_u\varphi_2 = \varphi_3 \end{cases}$$

Исключив второй узловой ток, запишем систему уравнений в более удобной форме:

$$\begin{cases} \varphi_4 = \frac{I}{Y_{11}} I_{11} + \frac{Y_{12}}{Y_{11}} \varphi_2 + \frac{Y_{13}}{Y_{11}} \varphi_3 \\ \varphi_2 = \frac{Y_{21}}{Y_{22}} \varphi_4 + \frac{Y_{23}}{Y_{22}} \varphi_3 \\ \varphi_3 = -k_u \varphi_2 \end{cases}$$

Решим эту систему уравнений последовательно исключая переменные:

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \frac{Y_{21}}{Y_{22}} \left[\frac{I}{Y_{11}} I_{11} + \frac{Y_{12}}{Y_{11}} \varphi_2 + \frac{Y_{13}}{Y_{11}} \varphi_3 \right] + \frac{Y_{23}}{Y_{22}} \varphi_3 \\ \varphi_2 - \frac{Y_{21} Y_{12}}{Y_{22} Y_{11}} \varphi_2 &= \frac{Y_{21}}{Y_{22}} \frac{I}{Y_{11}} I_{11} + \left[\frac{Y_{21} Y_{13}}{Y_{22} Y_{11}} + \frac{Y_{23}}{Y_{22}} \right] \varphi_3 \\ \varphi_2 \left(1 - \frac{Y_{21} Y_{12}}{Y_{22} Y_{11}} \right) &= \frac{Y_{21}}{Y_{22} Y_{11}} I_{11} + \left(\frac{Y_{21} Y_{13} + Y_{23} Y_{11}}{Y_{22} Y_{11}} \right) \varphi_3 \\ \varphi_2 \left(\frac{Y_{22} Y_{11} - Y_{21} Y_{12}}{Y_{22} Y_{11}} \right) &= \frac{Y_{21}}{Y_{22} Y_{11}} I_{11} + \left(\frac{Y_{21} Y_{13} + Y_{23} Y_{11}}{Y_{22} Y_{11}} \right) \varphi_3 \\ \varphi_2 &= \frac{Y_{21}}{Y_{22} Y_{11} - Y_{21} Y_{12}} I_{11} + \left(\frac{Y_{21} Y_{13} + Y_{23} Y_{11}}{Y_{22} Y_{11} - Y_{21} Y_{12}} \right) \varphi_3 \end{aligned}$$

Примем $Y_{22} Y_{11} - Y_{21} Y_{12} = \Delta$

$$\begin{aligned} \text{тогда } \varphi_2 &= \frac{Y_{21}}{\Delta} I_{11} + \left(\frac{Y_{21} Y_{13} + Y_{23} Y_{11}}{\Delta} \right) \varphi_3 \\ \varphi_3 &= -k_u \varphi_2 = -k_u \left[\frac{Y_{21}}{\Delta} I_{11} + \left(\frac{Y_{21} Y_{13} + Y_{23} Y_{11}}{\Delta} \right) \varphi_3 \right] \end{aligned}$$

$$\varphi_3 + k_u \left(\frac{Y_{21}Y_{13} + Y_{23}Y_{11}}{\Delta} \right) \varphi_3 = -k_u \frac{Y_{21}}{\Delta} I_{11}$$
$$\varphi_3 \left[1 + k_u \frac{Y_{21}Y_{13} + Y_{23}Y_{11}}{\Delta} \right] = -k_u \frac{Y_{21}}{\Delta} I_{11}$$

Исключая единицу в скобках и сокращая общий множитель k_u , получаем

$$\varphi_3 (Y_{21}Y_{13} + Y_{23}Y_{11}) = -Y_{21}I_{11}$$
$$\varphi_3 = \frac{-Y_{21}I_{11}}{Y_{21}Y_{13} + Y_{23}Y_{11}}$$

Запишем выражения для проводимостей и узловых токов:

$$Y_{11} = C_1 p + C_2 p + C_3 p + \frac{1}{R_1} = (C_1 + C_2 + C_3) p + \frac{1}{R_1} = \frac{(C_1 + C_2 + C_3) R_1 p + 1}{R_1}$$
$$Y_{22} = p C_2 + \frac{1}{R_2} = \frac{1 + R_2 C_2 p}{R_2}$$
$$Y_{12} = Y_{21} = C_2 p$$
$$Y_{13} = Y_{31} = C_1 p$$
$$Y_{23} = Y_{32} = \frac{1}{R_2}$$
$$I_{11} = E_{\text{ex}} Y_1 = \frac{E_{\text{ex}}}{R_1}$$

тогда:

$$\varphi_3 = \frac{-Y_{21}I_{11}}{Y_{21}Y_{13} + Y_{23}Y_{11}} = \frac{-C_2 p \cdot \frac{E_{\text{ex}}}{R_1}}{C_2 p \cdot C_1 p + \frac{1}{R_2} \cdot \frac{(C_1 + C_2 + C_3) R_1 p + 1}{R_1}} =$$
$$= \frac{-\frac{C_2 E_{\text{ex}} p}{R_1}}{C_1 C_2 p^2 + \frac{(C_1 + C_2 + C_3) R_1 p + 1}{R_1 R_2}} = \frac{-\frac{C_2 E_{\text{ex}} p}{R_1}}{\frac{C_1 C_2 R_1 R_2 p^2 + (C_1 + C_2 + C_3) R_1 p + 1}{R_1 R_2}} =$$
$$= \frac{-R_2 C_2 E_{\text{ex}} p}{C_1 C_2 R_1 R_2 p^2 + (C_1 + C_2 + C_3) R_1 p + 1}$$

Искомая передаточная функция:

$$\begin{aligned} K(p) &= \frac{U_{\text{вых}}(p)}{E_{\text{вх}}(p)} = \frac{\varphi_3 - \varphi_0}{E_{\text{вх}}} = \frac{\varphi_3}{E_{\text{вх}}} = \frac{-R_2 C_2 E_{\text{вх}} p}{C_1 C_2 R_1 R_2 p^2 + (C_1 + C_2 + C_3) R_1 p + 1} = \\ &= \frac{-R_2 C_2 p}{C_1 C_2 R_1 R_2 p^2 + (C_1 + C_2 + C_3) R_1 p + 1} = \frac{-R_2 C_2 p}{p^2 + \frac{(C_1 + C_2 + C_3) R_1}{C_1 C_2 R_1 R_2} p + \frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_2}} = \\ &= \frac{-\frac{1}{C_1 R_1} p}{p^2 + \frac{(C_1 + C_2 + C_3)}{C_1 C_2 R_2} p + \frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_2}} = \frac{b_1 p}{p^2 + a_1 p + a_0} \end{aligned}$$

, где

$$\begin{aligned} b_1 &= -\frac{1}{C_1 R_1} = -\frac{1}{1 \times 10^{-6} \cdot 100} = -10000 \\ a_1 &= \frac{(C_1 + C_2 + C_3)}{C_1 C_2 R_2} = \frac{(1 \times 10^{-6} + 1 \times 10^{-6} + 10,8 \times 10^{-6})}{1 \times 10^{-6} \cdot 1 \times 10^{-6} \cdot 1000} = \frac{12,8 \times 10^{-6}}{1 \times 10^{-12} \cdot 1000} = 12800 \\ a_0 &= \frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_2} = \frac{1}{1 \times 10^{-6} \cdot 1 \times 10^{-6} \cdot 100 \cdot 1000} = 1 \times 10^7 \end{aligned}$$

Тогда:

$$K(p) = \frac{b_1 p}{p^2 + a_1 p + a_0} = \frac{-10000 p}{p^2 + 12800 p + 1 \times 10^7}$$

Найдем и построим АЧХ:

Для анализа передаточных свойств фильтра, представим функцию $K(p)$ в комплексной форме записи заменив переменную p на $j\omega$

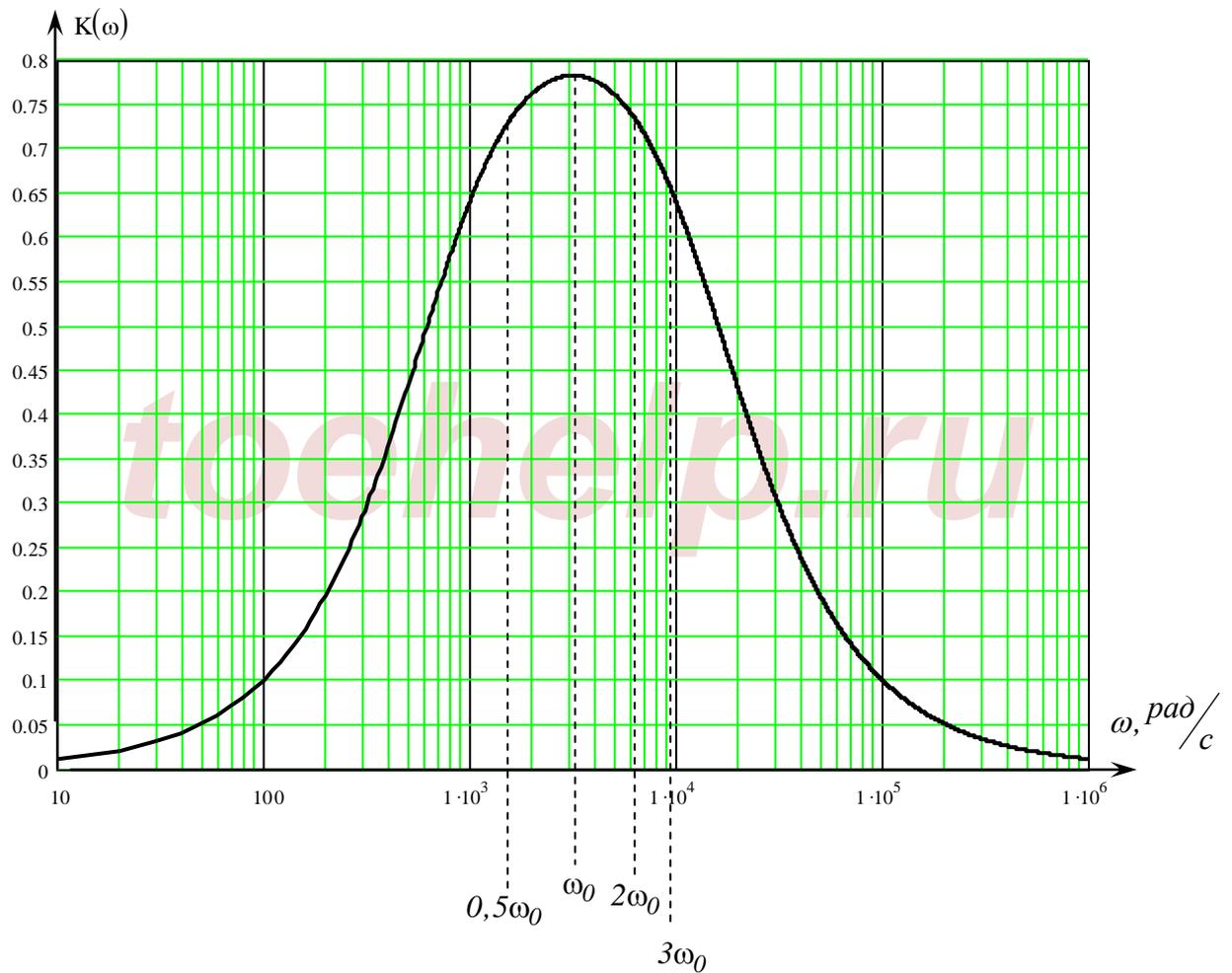
$$K(j\omega) = \frac{-10000 \cdot j\omega}{(j\omega)^2 + 12800 \cdot j\omega + 1 \times 10^7} = \frac{-j10000\omega}{1 \times 10^7 - \omega^2 + j12800\omega} = |K(j\omega)| \cdot e^{j\psi(\omega)},$$

где $|H(j\omega)|$ - амплитудно-частотная характеристика (АЧХ)

$$\begin{aligned} |K(j\omega)| &= \frac{10000\omega}{\sqrt{(1 \times 10^7 - \omega^2)^2 + (12800 \cdot \omega)^2}} = \frac{10000\omega}{\sqrt{1 \times 10^{14} - 2 \cdot 1 \times 10^7 \omega^2 + \omega^4 + 12800^2 \cdot \omega^2}} = \\ &= \frac{10000\omega}{\sqrt{\omega^4 + 1,4384 \times 10^8 \omega^2 + 1 \times 10^{14}}} \end{aligned}$$

По найденному выражению можно построить график АЧХ.

График АЧХ:



Здесь:

$$\omega_0 = \sqrt{a_0} = \sqrt{1 \times 10^7} = 3162,3 \frac{\text{rad}}{\text{с}}$$

При $\omega = 0$, $K=0$