

Задача 3 1**Дано:**

$$E = 150 \text{ В}$$

$$L = 4 \text{ мГн}$$

$$C = 5 \text{ мкФ}$$

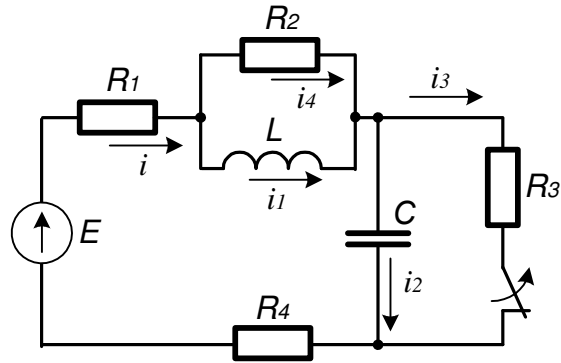
$$R_1 = 3 \text{ Ом}$$

$$R_2 = 10 \text{ Ом}$$

$$R_3 = 5 \text{ Ом}$$

$$R_4 = 7 \text{ Ом}$$

$$u_{R1}(t) - ?$$

**I) Расчет классическим методом**

Примем

$$R = R_1 + R_4 = 3 + 7 = 10 \text{ Ом}$$

1) Расчет режима до коммутации (при $t = 0_-$)

$$i_2(0_-) = i_4(0_-) = 0$$

$$i(0_-) = i_1(0_-) = i_3(0_-) = \frac{E}{R + R_3} = \frac{150}{10 + 5} = 10 \text{ А}$$

$$u_C(0_-) = i_3(0_-)R_3 = 10 \cdot 5 = 50 \text{ В}$$

$$u_{R1}(0_-) = i(0_-)R_1 = 10 \cdot 3 = 30 \text{ В}$$

по независимым начальным условиям:

$$i_1(0_+) = i_1(0_-) = 10 \text{ А}$$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 50 \text{ В}$$

2) Составим характеристическое уравнение и найдем его корни

$$Z(p) = R + \frac{1}{Cp} + \frac{R_2 Lp}{R_2 + Lp} = \frac{R_2 L C p^2 + R_2 + Lp + Cp(R_2 + Lp)R}{Cp(R_2 + Lp)} = 0$$

$$\Rightarrow R_2 L C p^2 + R_2 + Lp + Cp(R_2 + Lp)R = 0$$

$$(R + R_2) L C p^2 + (R R_2 C + L) p + R_2 = 0$$

$$(10 + 10) \cdot 0,004 \cdot 5 \times 10^{-6} p^2 + (10 \cdot 10 \cdot 5 \times 10^{-6} + 0,004) p + 10 = 0$$

$$4 \times 10^{-7} p^2 + 0,0045 p + 10 = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{-0,0045 \pm \sqrt{0,0045^2 - 4 \cdot 4 \times 10^{-7} \cdot 10}}{2 \cdot 4 \times 10^{-7}}$$

$$p_1 \approx -3048,1 \text{ с}^{-1};$$

$$p_2 \approx -8201,9 \text{ с}^{-1}$$

Корни действительные и разные значит переходный процесс будет аperiодическим.

3) Запишем свободную составляющую тока i

$$i_{1c\phi}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

, где A_1 и A_2 - постоянные интегрирования;

$|p_2| > |p_1|$, поэтому экспонента с показателем $p_2 t$ будет затухать быстрее чем с показателем $p_1 t$.

4) Расчет установившегося режима после коммутации.

$$i_{np} = i_{1np} = i_{2np} = i_{3np} = i_{4np} = 0$$

$$u_{C np} = E = 150 \text{ В}$$

5) По независимым начальным условиям рассчитаем токи и напряжения в схеме при $t = 0_+$

По 1-у закону Кирхгофа:

$$i(0_+) = i_1(0_+) + i_4(0_+)$$

По 2-у закону Кирхгофа:

$$i(0_+)R + i_4(0_+)R_2 + u_C(0_+) = E$$

$$(i_1(0_+) + i_4(0_+))R + i_4(0_+)R_2 + u_C(0_+) = E$$

$$i_4(0_+)(R + R_2) = E - i_1(0_+)R - u_C(0_+)$$

$$i_4(0_+) = \frac{E - i_1(0_+)R - u_C(0_+)}{R + R_2} = \frac{150 - 10 \cdot 10 - 50}{10 + 10} = 0$$

тогда

$$i_2(0_+) = i(0_+) = i_1(0_+) + i_4(0_+) = 10 + 0 = 10 \text{ А}$$

6) Свободные составляющие токов и напряжений при $t = 0_+$ найдем как разницу между переходными и принужденными величинами.

$$i_{1c\phi}(0_+) = i_1(0_+) - i_{1np} = 10 - 0 = 10 \text{ А}$$

$$i_{2c\phi}(0_+) = i_2(0_+) - i_{2np} = 10 - 0 = 10 \text{ А}$$

$$i_{4c\phi}(0_+) = i_4(0_+) - i_{4np} = 0 - 0 = 0 \text{ А}$$

$$u_{C c\phi}(0_+) = u_C(0_+) - u_{C np} = 50 - 150 = -100 \text{ А}$$

$$L \frac{di_{1c\phi}(0_+)}{dt} - i_{4c\phi}(0_+)R_2 = 0 \Rightarrow \frac{di_{1c\phi}(0_+)}{dt} = \frac{i_{4c\phi}(0_+)R_2}{L} = \frac{0 \cdot 10}{0,004} = 0$$

7) Определим постоянные интегрирования по начальным условиям

$$\begin{cases} i_{1c\phi}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} \\ \frac{di_{1c\phi}(t)}{dt} = A_1 p_1 e^{p_1 t} + A_2 p_2 e^{p_2 t} \end{cases}$$

Подставим в эти уравнения $t = 0_+$

$$\begin{cases} i_{1c\delta}(0_+) = A_1 + A_2 \\ \frac{di_{1c\delta}(0_+)}{dt} = A_1 p_1 + A_2 p_2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 10 = A_1 + A_2 \\ 0 = A_1 p_1 + A_2 p_2 \end{cases}$$

Из первого уравнения системы имеем $A_1 = 10 - A_2$

Подставив это выражение во второе уравнение системы, найдем A_2

$$\begin{aligned} 0 &= A_1 p_1 + A_2 p_2 \\ 0 &= (10 - A_2) p_1 + A_2 p_2 \\ -10 p_1 &= A_2 (p_2 - p_1) \\ \Rightarrow A_2 &= \frac{-10 p_1}{p_2 - p_1} = \frac{-10 \cdot (-3048,1)}{-8201,9 - (-3048,1)} \approx -5,914 \text{ A} \end{aligned}$$

тогда $A_1 = 10 - A_2 = 10 - (-5,914) = 15,914 \text{ A}$

8) Ток $i_1(t)$ найдем как сумму его принужденной и свободной составляющих:

$$i_1(t) = i_{1np} + i_{1c\delta}(t) = i_{1np} + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} = 15,914 \cdot e^{-3048,1t} - 5,914 \cdot e^{-8201,9t}, \text{ A}$$

тогда напряжение на индуктивности:

$$\begin{aligned} u_{L1}(t) &= L \frac{di_1(t)}{dt} = 0,004 \cdot (15,914 \cdot e^{-3048,1t} - 5,914 \cdot e^{-8201,9t}) \approx \\ &\approx -194 \cdot e^{-3048,1t} + 194 \cdot e^{-8201,9t}, \text{ B} \end{aligned}$$

По закону Ома:

$$i_4(t) = \frac{u_{L1}(t)}{R_2} = \frac{-194 \cdot e^{-3048,1t} + 194 \cdot e^{-8201,9t}}{10} = -19,4 \cdot e^{-3048,1t} + 19,4 \cdot e^{-8201,9t}, \text{ A}$$

По 1-у закону Кирхгофа:

$$\begin{aligned} i(t) &= i_1(t) + i_4(t) = 15,914 \cdot e^{-3048,1t} - 5,914 \cdot e^{-8201,9t} - 19,4 \cdot e^{-3048,1t} + 19,4 \cdot e^{-8201,9t} = \\ &= -3,486 \cdot e^{-3048,1t} + 13,486 \cdot e^{-8201,9t}, \text{ A} \end{aligned}$$

для проверки подставим в это уравнение $t = 0_+$,

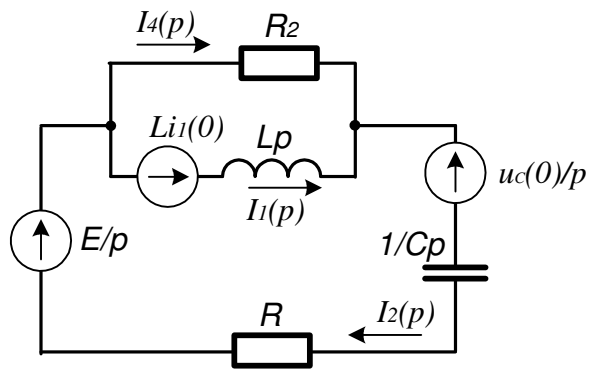
получим $i(0_+) = 10 \text{ A}$, что совпадает с расчетом по п.5.

Искомое напряжение определим по закону Ома:

$$u_{R1}(t) = R_1 i(t) = 3 \cdot (-3,486 \cdot e^{-3048,1t} + 13,486 \cdot e^{-8201,9t}) \approx -10,46 \cdot e^{-3048,1t} + 40,46 \cdot e^{-8201,9t}, \text{ B}$$

II) Расчет операторным методом.

1) Составим эквивалентную схему для изображений для момента времени $t = 0_+$



Начальные условия

$$i_1(0) = i_1(0_-) = i_1(0_+) = 10 \text{ A}$$

$$u_C(0) = u_C(0_-) = u_C(0_+) = 50 \text{ B}$$

2) Найдем изображение тока $I_2(p)$ с помощью уравнений составленных по первому и второму законам Кирхгофа

$$\begin{cases} I_2(p) - I_1(p) - I_4(p) = 0 \\ I_2(p) \left(R + \frac{1}{Cp} \right) + I_1(p)Lp = \frac{E}{p} - \frac{u_C(0)}{p} + Li_1(0) \\ I_2(p) \left(R + \frac{1}{Cp} \right) + I_4(p)R_2 = \frac{E}{p} - \frac{u_C(0)}{p} \end{cases}$$

Выразим из 2-го уравнения системы $I_1(p)$ через $I_2(p)$

$$I_2(p) \frac{RCp+1}{Cp} + I_1(p)Lp = \frac{E - u_C(0) + Li_1(0)p}{p}$$

$$\Rightarrow I_1(p) = \frac{E - u_C(0) + Li_1(0)p}{Lp^2} - \frac{RCp+1}{LCp^2} I_2(p)$$

Выразим из 3-го уравнения системы $I_4(p)$ через $I_2(p)$

$$\frac{RCp+1}{Cp} I_2(p) + I_4(p)R_2 = \frac{E - u_C(0)}{p}$$

$$\Rightarrow I_4(p) = \frac{E - u_C(0)}{R_2 p} - \frac{RCp+1}{R_2 Cp} I_2(p)$$

Подставим найденные выражения в первое уравнение системы и найдем $I_2(p)$

$$I_2(p) - I_1(p) - I_4(p) = 0$$

$$I_2(p) - \frac{E - u_C(0) + Li_1(0)p}{Lp^2} + \frac{RCp+1}{LCp^2} I_2(p) - \frac{E - u_C(0)}{R_2 p} + \frac{RCp+1}{R_2 Cp} I_2(p) = 0$$

$$\left(1 + \frac{RCp+1}{LCp^2} + \frac{RCp+1}{R_2 Cp} \right) I_2(p) = \frac{E - u_C(0) + Li_1(0)p}{Lp^2} + \frac{E - u_C(0)}{R_2 p}$$

$$\frac{R_2 LCp^2 + (RCp+1)R_2 + (RCp+1)Lp}{R_2 LCp^2} I_2(p) = \frac{(E - u_C(0))R_2 + R_2 Li_1(0)p + (E - u_C(0))Lp}{R_2 Lp^2}$$

$$\Rightarrow I_2(p) = \frac{(E - u_C(0))R_2 + R_2 Li_1(0)p + (E - u_C(0))Lp}{R_2 LCp^2 + (RCp+1)R_2 + (RCp+1)Lp} \times C =$$

$$= \frac{(R_2 i_1(0) + E - u_C(0))LCp + (E - u_C(0))R_2 C}{(R + R_2)LCp^2 + (RR_2 C + L)p + R_2}$$

тогда изображение напряжения $U_{R1}(p)$ равно:

$$U_{R1}(p) = I_2(p)R_1 = \frac{(R_2 i_1(0) + E - u_C(0))LCp + (E - u_C(0))R_2C}{(R + R_2)LCp^2 + (RR_2C + L)p + R_2} R_1 =$$
$$= \frac{(R_2 i_1(0) + E - u_C(0))R_1LCp + (E - u_C(0))R_1R_2C}{(R + R_2)LCp^2 + (RR_2C + L)p + R_2}$$

Подставим числовые значения:

$$U_{R1}(p) = \frac{(10 \cdot 10 + 150 - 50) \cdot 3 \cdot 0,004 \cdot 5 \times 10^{-6} p + (150 - 50) \cdot 3 \cdot 10 \cdot 5 \times 10^{-6}}{(10 + 10) \cdot 0,004 \cdot 5 \times 10^{-6} p^2 + (10 \cdot 10 \cdot 5 \times 10^{-6} + 0,004) p + 10} =$$
$$= \frac{1,2 \times 10^{-5} p + 0,015}{4 \times 10^{-7} p^2 + 0,0045 p + 10} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}$$

Найдем корни уравнения $F_2(p) = 0$

$$4 \times 10^{-7} p^2 + 0,0045 p + 10 = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{-0,0045 \pm \sqrt{0,0045^2 - 4 \cdot 4 \times 10^{-7} \cdot 10}}{2 \cdot 4 \times 10^{-7}}$$

$$p_1 \approx -3048,1 \text{ c}^{-1};$$

$$p_2 \approx -8201,9 \text{ c}^{-1}$$

Корни действительные и разные, значит переходный процесс будет аperiodическим.

3) Для перехода от изображения к оригиналу воспользуемся формулой разложения для простых корней.

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k) \cdot e^{p_k t}}{F_2'(p_k)}$$

в соответствии с этой формулой напряжение $u_{R1}(t)$ будет равно:

$$u_{R1}(t) = \frac{1,2 \times 10^{-5} p_1 + 0,015}{2 \cdot 4 \times 10^{-7} p_1 + 0,0045} e^{p_1 t} + \frac{1,2 \times 10^{-5} p_2 + 0,015}{2 \cdot 4 \times 10^{-7} p_2 + 0,0045} e^{p_2 t} =$$
$$= \frac{1,2 \times 10^{-5} \cdot (-3048,1) + 0,015}{8 \times 10^{-7} \cdot (-3048,1) + 0,0045} e^{-3048,1 t} + \frac{1,2 \times 10^{-5} \cdot (-8201,9) + 0,015}{8 \times 10^{-7} \cdot (-8201,9) + 0,0045} e^{-8201,9 t} \approx$$
$$\approx -10,47 \cdot e^{-3048,1 t} + 40,47 \cdot e^{-8201,9 t}, B$$

Видно, что полученное выражение для напряжения $u_{R1}(t)$ хорошо совпадает с выражением полученным классическим методом.

III) Построим график изменения u_{R1} в функции времени на интервале от $t = 0$ до $t = t_{nn}$

, где

$$t_{nn} = 3 \cdot \tau_{\min} = 3 \cdot 0,00033 = 0,00099 \text{ c}$$

$$\tau_{\min} = \frac{1}{|p|_{\min}} = \frac{1}{3048,1} \approx 0,00033 \text{ c}$$

$|p|_{\min}$ - меньший по модулю корень характеристического уравнения

