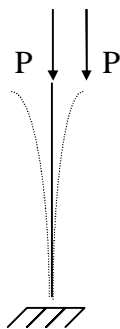


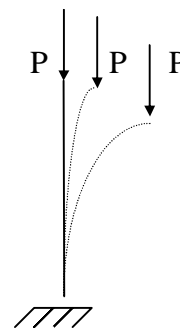
Лекция 5

Устойчивость сооружений

Системы, применяемые в качестве строительных конструкций, должны находиться под действием внешних нагрузок в состоянии устойчивого равновесия. Это означает, что если какие-либо случайные причины выведут систему из состояния равновесия, то после удаления этих причин система должна вернуться в свое первоначальное положение.



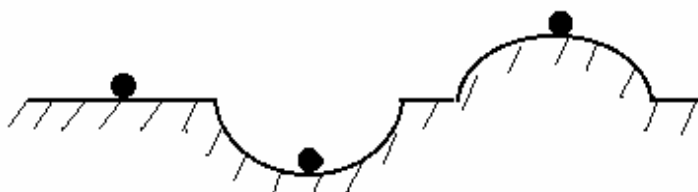
а) устойчивое равновесия



б) неустойчивое

Т.е., если упругий стержень, после отклонения, поколебавшись вокруг вертикального положения, вернется в свое первоначальное положение (рис.а), то его равновесие называется устойчивым, а если стержень не может вернуться в свое исходное положение (рис. б), то равновесное состояние называется неустойчивым.

Для более наглядного представления понятий устойчивого и неустойчивого состояний рассмотрим положение шарика а, б, в:



а) б) в)

а) устойчивое равновесие; б) безразличное состояние; в) неустойчивое состояние

При заданной схеме сооружения и заданном положении внешних нагрузок вид равновесного состояния сооружения зависит от величины нагрузки. В каждом отдельном случае можно найти ту нагрузку, при которой первоначальная форма равновесия становится неустойчивой и возможно другое, качественно новое деформированное состояние.

Переход сооружения из устойчивого состояния в неустойчивое часто называют потерей устойчивости, границу этого перехода называют критическим состоянием сооружения, а соответствующие нагрузки - критическими нагрузками.

Различают два вида потери устойчивости: 1) потеря устойчивости положения; 2) потеря устойчивости первоначальной формы равновесия.

Потеря устойчивости положения (рис. 1) относится к случаю, когда сооружение в целом не может далее сохранять свое первоначальное положение и вынуждено его

изменить, например, опрокидывание силосных банок, водопроводных башен, опрокидывание или сдвиг подпорных стенок, плотин и т.д.

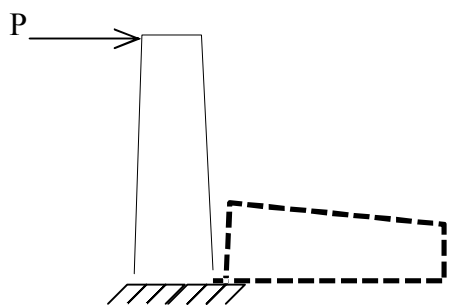


рис. 1

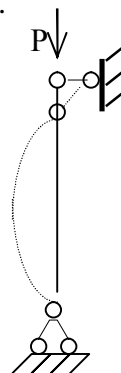


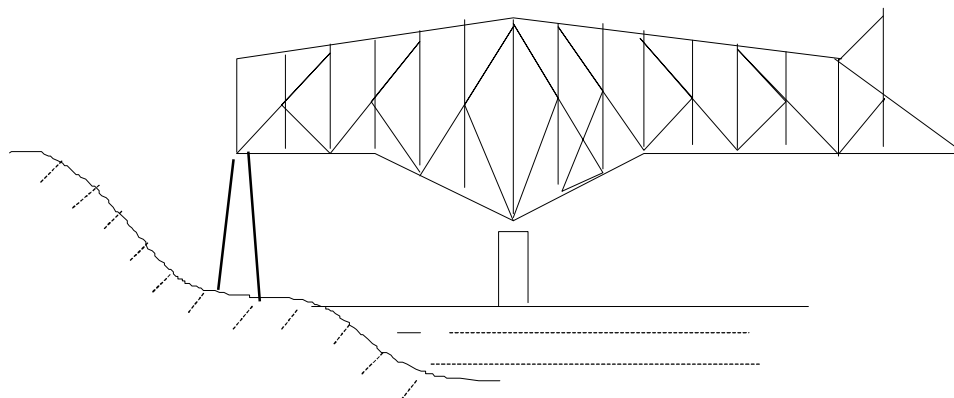
рис. 2

Потеря устойчивости первоначальной формы равновесия (рис. 2) относится к случаю, когда первоначальная форма деформации тела становится неустойчивой и тело принимает другую форму, качественно отличную от первоначальной. Например, выпучивание сжатых стержней, искривление сечений балок и т.д.

Процесс потери устойчивости происходит очень быстро и практически ведет к разрушению сооружений.

Известен целый ряд катастроф крупных инженерных сооружений, происшедших в результате потери устойчивости всего сооружения или отдельных его элементов. Это катастрофы на грани XIX - XX столетий: крушение Менхенштейнского моста в Швейцарии в 1891 году, Квебекского моста через реку Св.Лаврентия в 1907 году, крушение Гамбургского газгольдера в 1907 году и др.

В описании крушения Квебекского моста, рухнувшего при навесной сборке 29 августа 1907 г. говорится: "Еще 6 августа, т.е. за 23 дня до крушения, консультант компании, строившей мост, получил сообщение с места работ, в котором указывалось, что в ребрах нижнего пояса двух панелей западной консольной фермы имеются выгибы; 20 августа, т.е. за 9 дней до катастрофы, инспектор моста установил, что выгибы и деформации имеются в трех панелях восточной консольной фермы. Но на предупреждение инспектора никто не обратил внимания. За два дня до катастрофы изогнулась панель № 9 в береговом пролете западной фермы. Наконец 28 августа рабочие-клепальщики обратили внимание инженеров еще на один прогиб, которого раньше не было. Все это подтверждает, что происходил типичный процесс нарастания деформаций внецентренно сжатых стержней в зоне близкой к критической. Когда эта нагрузка была достигнута, мост рухнул".



Различают потерю устойчивости $I^{\text{го}}$ и $II^{\text{го}}$ рода.

Примером потери устойчивости Γ^0 рода является продольный изгиб прямолинейного стержня, сжатого осевой силой. При этом потеря устойчивости (Γ^0 рода) сопровождается возникновением нового вида деформации изгиба вместо сжатия, имевшего место при $P < P_{кр}$.

При потере устойчивости второго рода вид деформации не меняется, но деформации стержня при $P \approx P_{кр}$ начинают быстро возрастать, даже без увеличения нагрузки. Это потеря устойчивости внецентренно сжатых стержней, стержней подверженных действию продольных и поперечных нагрузок и т.д.

В реальных конструкциях стержни всегда сжато-изогнуты (т.е. происходит потеря устойчивости Π^0 рода).

Методы исследования устойчивости

Основными методами исследования устойчивости являются:

- 1) статический метод;
- 2) динамический метод;
- 3) энергетический метод.

Сущность статического метода заключается в том, что для возможного критического состояния записывается уравнение возможного вида деформированной оси элемента. Из характеристических уравнений деформирования определяются те значения $P_{кр}$ внешних сил, при которых возможна новая форма равновесия.

Применяя динамический метод, составляют уравнения частоты собственных колебаний стержня сжатого силой P и определяют то значение силы $P_{кр}$, при котором частота собственных колебаний будет равна нулю.

Энергетический метод основан на принципе Дирихле, согласно которому если система находится в состоянии устойчивого равновесия, то ее полная потенциальная энергия минимальна $\mathcal{E} = \min$; если система находится в неустойчивом состоянии, то ее потенциальная энергия максимальна $\mathcal{E} = \max$, а если система находится в безразличном состоянии, то разность приращений энергий двух соседних возможных состояний равна нулю, т.е.

$$\mathcal{E} = \Delta U - \Delta T = 0,$$

где ΔU - приращение потенциальной энергии внутренних сил;

ΔT - внешних сил.

Или:

$$\Delta U = \Delta T$$

Записывая выражения приращений потенциальной энергии внешних и внутренних сил, на любом возможном состоянии, из равенства $\Delta U = \Delta T$ определяют $P_{кр}$.

Лекция 6

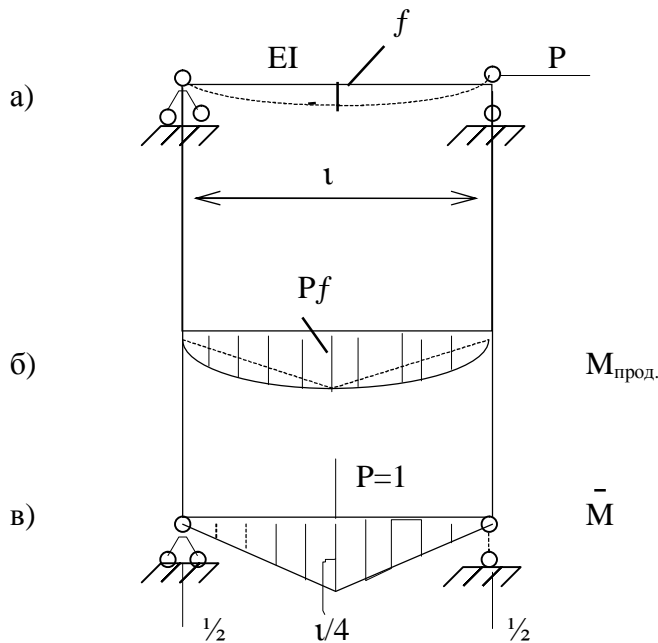
Статический метод исследования устойчивости стержневых систем

При исследовании статическим методом, рассматриваемой системе задается отклоненная форма равновесия (допускаемая имеющимися связями), совпадающая с новой ожидаемой формой системы после потери устойчивости, и определяются значения нагрузок, способных удержать систему в новой форме равновесия.

Обычно считают, что отклоненная форма равновесия бесконечно близка к исходной, а координаты граничных условий принимаются по исходному состоянию. Определенные на основе таких предпосылок нагрузки считаются критическими. Они соответствуют безразличному равновесию между исследуемым состоянием и бесконечно близким к нему.

Покажем применение этого способа на примере стержня постоянного сечения опертого по концам, критическая сила для которого по формуле Эйлера

$$P_{кр} = \frac{P^2 EJ}{l^2} = 9.87 \frac{EJ}{l^2}$$



Заддим стержню бесконечно малое перемещение, которое будем определять одним параметром - прогибом f . Эпюра $M_{прод.}^{узн.}$ от силы P дана на рис. б. Найдём перемещение f .

Если приближенно эпюру принять в виде треугольника:

$$f = \frac{1}{EJ} \frac{1}{2} Pf \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3} \frac{l}{4} \cdot 2 = \frac{2}{EJ} \frac{Pfl^2}{12};$$

или

$$\left(\frac{Pl^2}{12EJ} - 1 \right) f = 0;$$

в момент потери устойчивости $f \neq 0$, тогда

$$\frac{Pl^2}{12EJ} - 1 = 0; \quad \text{отсюда:} \quad P_{кр} = \frac{12EJ}{l^2}$$

Если предположить, что эпюра моментов от силы P определяется параболой, то

$$f = \frac{1}{EJ} \frac{2}{3} \frac{l}{2} \cdot Pf \cdot \frac{5}{8} \frac{l}{4} \cdot 2 = \frac{1}{EJ} \frac{5}{48} Pfl^2$$

или

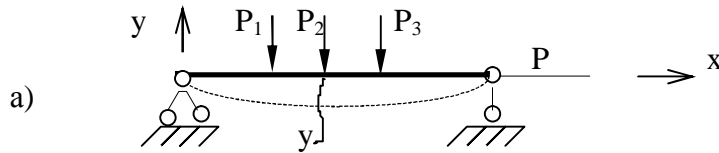
$$\left(\frac{Pl^2}{9.6EJ} - 1 \right) f = 0;$$

отсюда:

$$P_{кр} = \frac{9.6EJ}{l^2} \quad \text{более близко к } P_{кр}^0$$

Продольно-поперечный изгиб стержня

Рассмотрим случай, когда стержень нагружен не только продольными, но и поперечными нагрузками



В обычных расчетах считается, что продольные силы вызывают только деформации растяжения или сжатия, их влияние на величину изгибающих моментов не учитывается. При достаточно больших продольных силах такой расчет ведет к значительным ошибкам, поэтому при составлении уравнений равновесия необходимо, как и в задачах устойчивости учитывать изгибающие моменты, создаваемые продольными силами за счет искривления оси. Для рассматриваемого стержня:

$$M_{(x)} = M_o(x) + P_y$$

где $M_o(x)$ - момент от поперечных нагрузок.

Подставляя значение $M(x)$ в диф. уравнение изогнутой оси балки

$$y'' = -\frac{M}{EJ}$$

получим

$$y'' = -\frac{1}{EJ} (M_o(x) + P_y)$$

или

$$\boxed{y'' + \frac{P_y}{EJ} = -\frac{M_o(x)}{EJ}} \quad (1)$$

Уравнение (1) называется уравнением продольно-поперечного изгиба.

Если обозначить

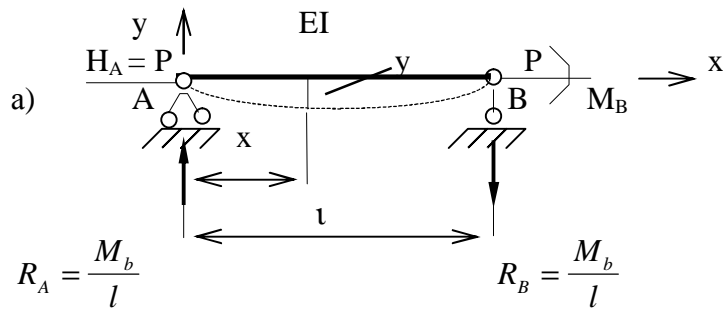
$$\boxed{K^2 = \frac{P}{EJ}}$$
$$y'' + K^2 y = -\frac{M_o(x)}{EJ}, \quad (2)$$

Общее уравнение которого запишется:

$$\boxed{y = C_1 \sin KX + C_2 \cos KX + \Phi} \quad (3)$$

где Φ - частное решение уравнения (2), которое принимается в виде функции аналогичной правой части уравнения (2).

В качестве примера рассмотрим внецентренно сжатый стержень:



$$M_x = \frac{M_B}{l} \cdot x + P_y$$

$$y'' = -\frac{1}{EJ} \left(\frac{M_B}{l} \cdot x + P_y \right) \quad (\text{a})$$

$$\boxed{y'' + \frac{P_y}{EJ} = -\frac{M_B}{EJ \cdot l} x; \quad K^2 = \frac{P}{EJ}} \quad (\text{б})$$

$$y'' + K^2 y = -\frac{M_B}{EJ \cdot l} x; \quad (\text{в})$$

Общее решение

$$y = C_1 \sin KX + C_2 \cos KX + \Phi \quad (\text{г})$$

где частное решение

$$\Phi = AX. \quad (\text{д})$$

Подставим частное решение (д) в дифференциальное уравнение (б), вместо

$$y = \Phi, \quad y'' = \Phi'' = 0$$

$$\frac{P}{EJ} AX = -\frac{M_B}{EJ \cdot l} \cdot x,$$

отсюда

$$A = -\frac{M_B}{Pl}$$

$$y = C_1 \sin KX + C_2 \cos KX + \Phi$$

Граничные условия задачи:

$$1) \text{ при } X = 0; \quad \Rightarrow \quad Y = 0$$

$$0 = C_2; \quad \text{т.е. } C_2 = 0;$$

$$2) \text{ при } X = l; \quad \Rightarrow \quad Y = 0$$

$$0 = C_1 \sin Kl - \frac{M_B}{P}, \quad C_1 = \frac{M_B}{P \sin Kl}.$$

$$y = \frac{M_B}{P} \frac{\sin KX}{\sin Kl} - \frac{M_B}{Pl} x$$

или

$$\boxed{y = \frac{M_B}{P} \left(\frac{\sin KX}{\sin Kl} - \frac{x}{l} \right)} \quad (4)$$

Определим угол поворота сечения балки на левой опоре:

$$y' = \frac{M_B}{P} \left(\frac{K \cos KX}{\sin Kl} - \frac{x}{l} \right)$$

$$\boxed{y' = \frac{M_B \cdot K}{P} \left(\frac{\cos KX}{\sin Kl} - \frac{1}{Kl} \right)} \quad (5)$$

$$j_A = y'_{(x=0)} = \frac{M_B K}{P} \left(\frac{1}{\sin Kl} - \frac{1}{Kl} \right)$$

умножим числитель и знаменатель на $6 Kl$.

$$j_A = \frac{M_B K^2 6l}{P 6 Kl} \left(\frac{1}{\sin Kl} - \frac{1}{Kl} \right), \text{ учитывая что } K^2 \frac{P}{EJ}$$

$$j_A = \frac{M_B P l 6}{6 P E J \cdot Kl} \left(\frac{1}{\sin Kl} - \frac{1}{Kl} \right)$$

или

$$j_A = \frac{M_B l}{6 E J} \cdot \frac{6}{Kl} \left(\frac{1}{\sin Kl} - \frac{1}{Kl} \right) = \frac{M_B l}{6 E J} \cdot y_1(Kl)$$

$$\boxed{j_A = \frac{M_B l}{6 E J} \cdot y_1(Kl)} \quad (6)$$

$y_1(Kl)$ - учитывает влияние продольной силы.

Угол поворота сечения на правой опоре:

$$j_B = y'_{(x=l)} = \frac{M_B K}{P} \left(\frac{\cos Kl}{\sin Kl} - \frac{1}{Kl} \right)$$

Умножим и разделим на $3 Kl$

$$j_B = \frac{3 M_B K^2 l}{3 P Kl} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} Kl} - \frac{1}{Kl} \right), \text{ учитывая что } K^2 \frac{P}{EJ}$$

$$j_B = \frac{3 M_B P l}{3 P E J Kl} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} Kl} - \frac{1}{Kl} \right)$$

$$j_B = \frac{M_B l}{3 E J} \cdot \frac{3}{Kl} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} Kl} - \frac{1}{Kl} \right) = \frac{M_B l}{3 E J} \cdot y_2(Kl)$$

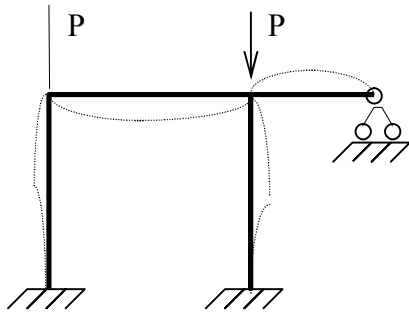
$$\boxed{j_B = \frac{M_B l}{3 E J} \cdot y_2(Kl)} \quad (7)$$

$y_2(Kl)$ - учитывает влияние продольной силы.

Лекция 7

Расчет статически неопределимых рам на устойчивость методом перемещений

Рассмотрим раму, нагруженную силами, приложенными в узлах.



Пренебрегая изменением длин стержней и их весом, можно считать, что при достаточно малых значениях сил все стержни остаются прямыми и в них возникают только продольные усилия. При достижении нагрузкой критического значения наряду с исходным появляется смежное, деформированное состояние равновесия.

Такой подход является идеализированным (как и при расчете центрально сжатых стержней), т.к. реальные нагрузки имеют эксцентриситет приложения, а также имеется начальный прогиб элементов от их собственной массы.

Для расчета рам на устойчивость можно использовать те же методы, что и для расчета на прочность: метод сил, метод перемещений, смешанный метод и т.др.

Смысл расчета рам на устойчивость заключается в определении для всех сжатых элементов критических сил $P_{кр}$ и их расчетных длин l_0 .

Расчету на устойчивость предшествует расчет рамы на прочность любым из известных методов. Затем рама рассчитывается на устойчивость под действием только узловых сжимающих нагрузок, которые берут из эпюры N расчета на прочность.

Порядок расчета рам на устойчивость методом перемещений

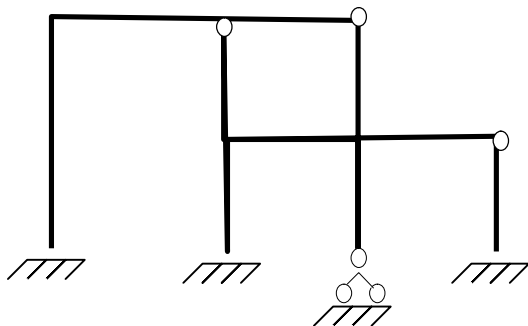
Порядок расчета рам на устойчивость аналогичен расчету на прочность.

1. Определяют степень кинематической неопределимости рамы

$$V = V_{уг} + V_{лин},$$

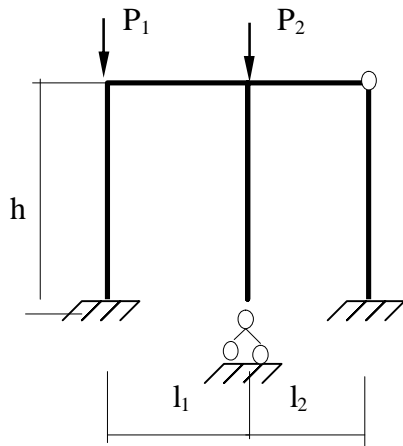
где $V_{уг}$ – степень угловой подвижности рамы, равна числу жестких узлов; $V_{лин}$ – степень линейной подвижности, равна числу возможных независимых перемещений узлов рамы.

$$V = V_{уг} + V_{лин} = 4 + 2 = 6$$

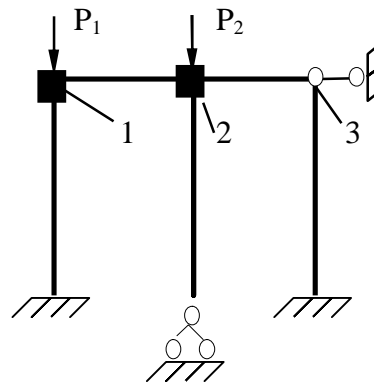


2. Выбирают основную систему метода перемещения, для чего в каждый жесткий узел вводят упругоподатливые защемления (связи 1^{го} рода), а по направлению возможных перемещений - дополнительные опорные стерженьки (связи 2^{го} рода).

Например:



Заданная система



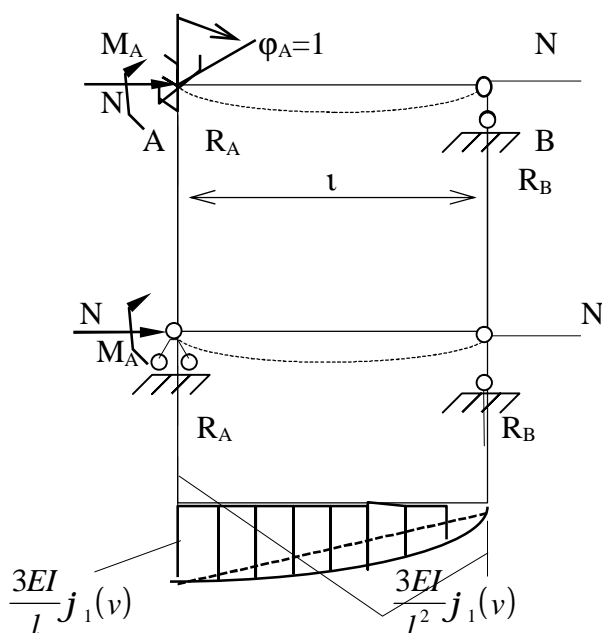
Основная система

3. Составляют систему канонических уравнений. В отличие от аналогичных уравнений расчета на прочность (поперечный изгиб) грузовые коэффициенты R_{ip} равны нулю, т.к. узловые нагрузки не вызывают реактивных усилий в дополнительных связях. Система канонических уравнений записывается :

$$\begin{cases} r_{11}z_1 + r_{12}z_2 + r_{13}z_3 = 0 \\ r_{21}z_1 + r_{22}z_2 + r_{23}z_3 = 0 \\ r_{31}z_1 + r_{32}z_2 + r_{33}z_3 = 0 \end{cases}$$

Действие внешней нагрузки в данном случае учитывается при вычислении единичных коэффициентов $r_{ik} = r_{ki}$, т.к. при единичных смещениях дополнительных связей деформируемые элементы, в пределах которых действуют сжимающие усилия, находятся в условиях продольно-поперечного изгиба.

4. Порядок определения опорных реакций с учетом сжимающих сил покажем на примере балки, у которой один конец жестко защемлен, другой шарнирно оперт.



$$j_A = \frac{M_A l}{3EI} y_2(Kl)$$

где

$$y_2(Kl) = \frac{3}{Kl} \left(\frac{1}{Kl} - \frac{1}{tgKl} \right)$$

Для того, чтобы основная система и заданная были равноценны необходимо чтобы M_A имел такую величину, при которой $\phi_A=1$.

$$j_A = \frac{M_A l}{3EJ} y_2(Kl) = 1,$$

отсюда

$$M_A = \frac{3EJ}{l} \frac{1}{y_2(Kl)}.$$

Обозначим:

$$\frac{1}{y_2(Kl)} = j_1(J), \quad \text{где} \quad \boxed{J = Kl = l \sqrt{\frac{P}{EJ}}}$$

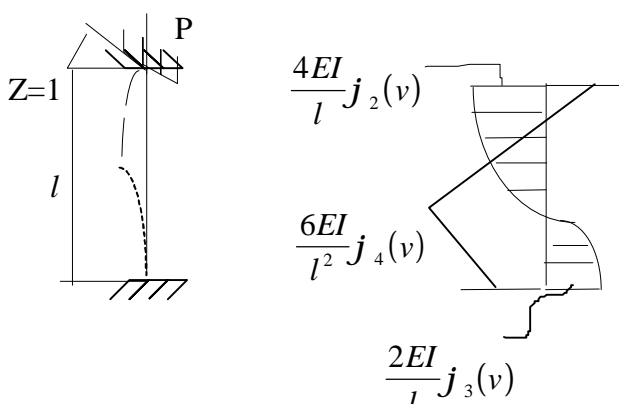
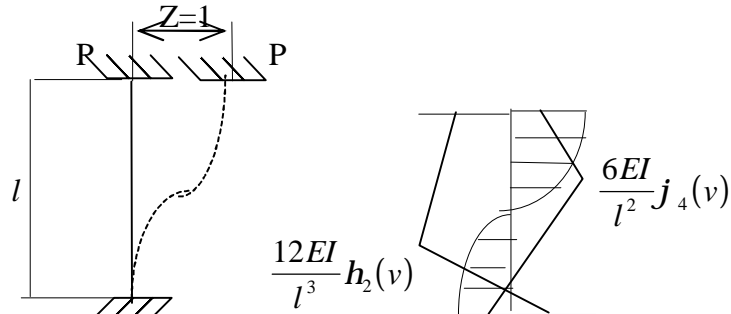
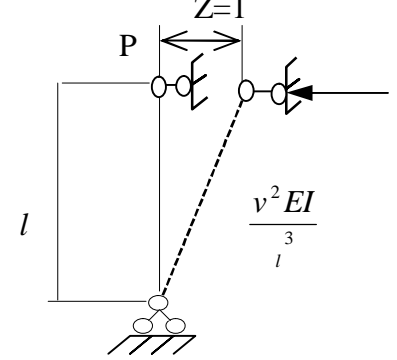
т.е.

$$j_1(J) = \frac{J}{3 \left(\frac{1}{J} - \frac{1}{\text{tg} J} \right)} = \frac{J^2}{3 \left(1 - \frac{J}{\text{tg} J} \right)} = \frac{J^2 \text{tg} J}{3(\text{tg} J - J)}$$

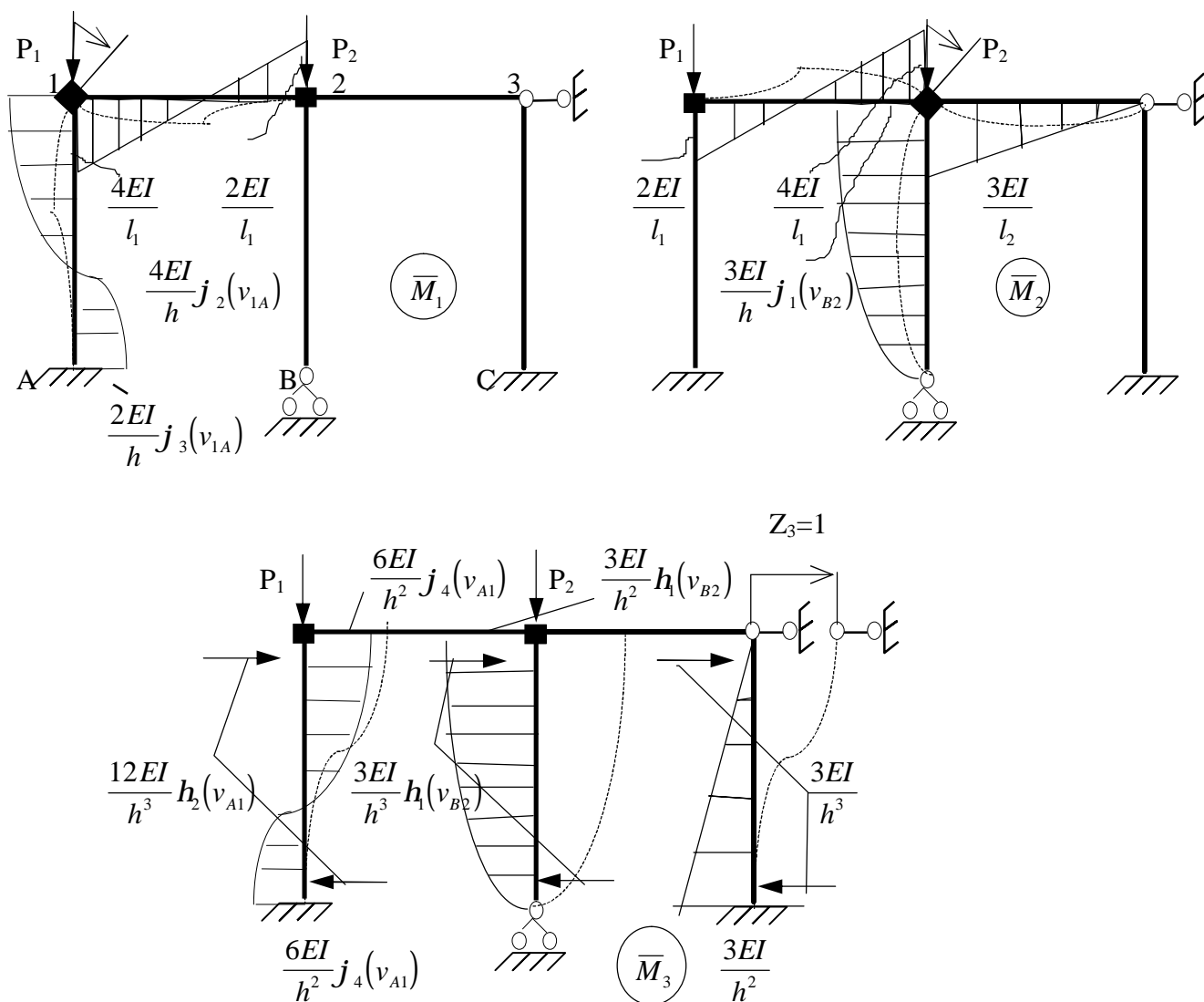
$$\boxed{\begin{aligned} R_A = R_B = \frac{M_A}{l} &= \frac{3EJ}{l^2} j_1(J) \\ M_A &= \frac{3EJ}{l} j_1(J) \end{aligned}}$$

Аналогично получают реакции опор и в других случаях.

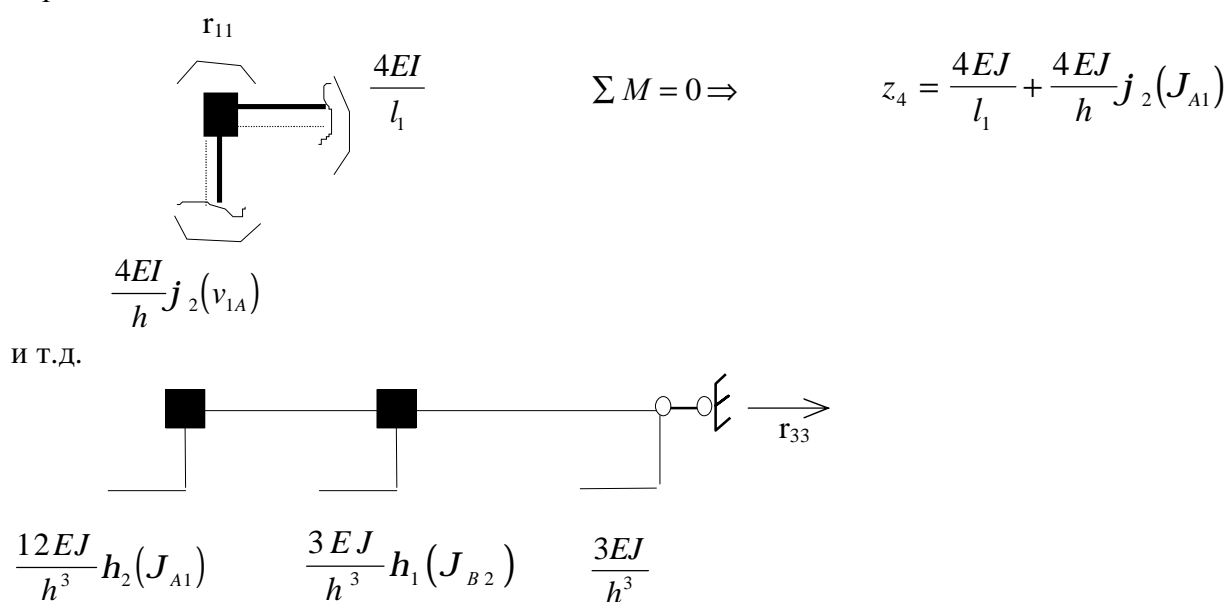
Схемы и эпюры	Коэффициенты
	$j_1(J) = \frac{J^2 \text{tg} J}{3(\text{tg} J - J)}$
	$h(J) = \frac{J^3}{3(\text{tg} J - J)};$

	$j_2(J) = \frac{J(\operatorname{tg} J - J)}{8 \operatorname{tg} J \left(\operatorname{tg} \frac{J}{2} - \frac{J}{2} \right)};$ $j_3(J) = \frac{J(J - \sin J)}{4 \sin J \left(\operatorname{tg} \frac{J}{2} - \frac{J}{2} \right)};$ $j_4(J) = j_1 \left(\frac{J}{2} \right).$
	$j_4(J) = j_1 \left(\frac{J}{2} \right);$ $h_2(J) = h_1 \left(\frac{J}{2} \right).$
	

5. Строят эпюры от единичных смещений наложенных связей. В пределах элементов, которые сжаты внешней нагрузкой, эпюры криволинейны и строятся в соответствии с приведенной выше таблицей. В пределах элементов не подверженных сжатию, эпюры прямолинейны и строятся по таблицам обычного метода перемещений (как при расчете на прочность) .



6. Коэффициенты системы канонических уравнений определяют как и в обычном методе перемещений.



$$\Sigma X = 0 \Rightarrow z_4 \frac{12EJ}{h^3} h_2(J_{A1}) + \frac{3EJ}{h^3} h_1(J_{B3}) + \frac{3EJ}{h^3}$$

7. Для заданной системы уравнений (без свободных членов), возможны два решения: первое, когда все $z_i = 0$, такое решение нас не устраивает, т.е. не соответствует условиям задачи; и второе решение, когда детерминант системы, составленный из единичных коэффициентов = 0.

$$Det = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{vmatrix} = 0;$$

Раскрывая этот определитель, получаем сложное трансцендентное уравнение, для решения которого необходимо вначале выразить все параметры v_i через один. Затем уравнение решается:

- 1) методом подстановки;
- 2) графическим методом.

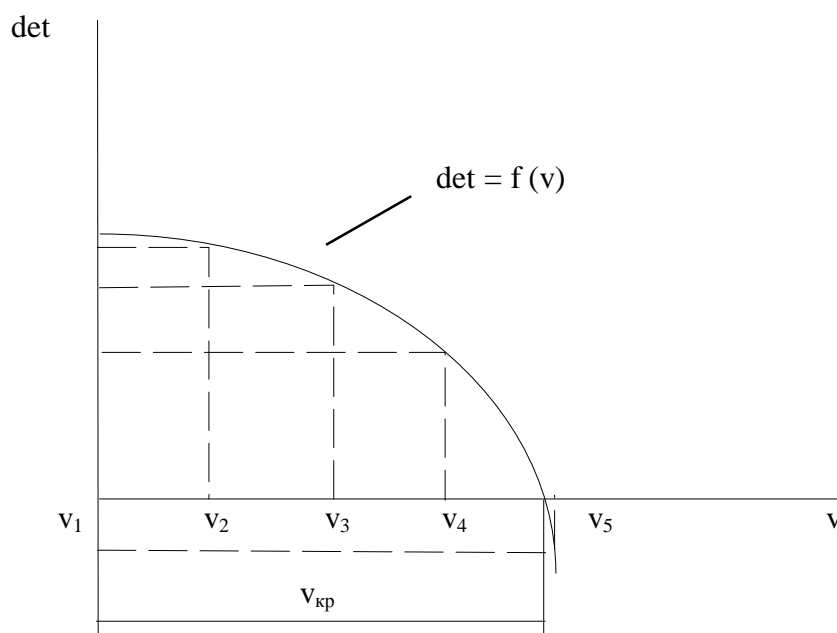
Метод подстановки самый примитивный способ решения. Применяется для простейших характеристических уравнений.

Сущность графического способа заключается в следующем:

- выбираем произвольное значение параметра v_i и находим $\det_1 = f(v)$

$v_1 \quad \Rightarrow \quad \det_1$
 $v_2 \quad \Rightarrow \quad \det_2$
 $v_3 \quad \Rightarrow \quad \det_3$
 и т.д.

На основании полученных значений строим график функции $\det = f(v)$.



Наименьшее значение параметра v , при котором $\det = 0$ называется $v_{кр}$.

8. Для стойки, параметры которой мы принимаем за исходные определяем критическую силу:

$$J = l \sqrt{\frac{P}{EJ}} \Rightarrow$$

$$P_{кр} = \frac{J_{кр}^2 EJ}{l^2}$$

и расчетную длину стержня:

$$P_{кр} = \frac{p^2 EJ}{l_0^2} = \frac{J_{кр}^2 EJ}{l^2}, \text{ отсюда}$$

$$l_0 = \frac{pl}{J_{кр}}$$

где: l_0 - расчетная длина стержня;

l - геометрическая длина стержня

или коэффициент приведения геометрической длины к расчетной:

$$m = \frac{p}{J_{кр}}$$

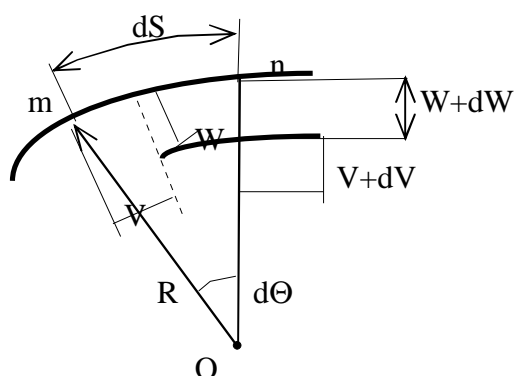
9. Зная соотношение между параметрами остальных элементов и исходным элементом, определяют $v_{кр}$ для всех остальных сжатых стержней.

10. Затем для всех сжатых стержней определяют $P_{кр}$ и l_0 .

Лекция 8

Понятие о расчете на устойчивость круговых арок постоянного сечения

1. Вывод дифференциального уравнения кругового бруса

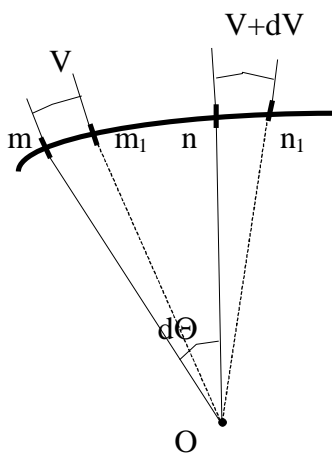


dS - длина элемента mn до деформации,
 R - радиус кривизны
 m_1n_2 положение элемента mn после деформации.

Обозначим проекции перемещения точек m и n через: V - проекцию перемещения на касательную и W - проекцию перемещения на радиус.

Определим относительную деформацию элемента dS . Для этого воспользуемся принципом наложения и будем определять отдельно деформацию элемента от перемещений W и V .

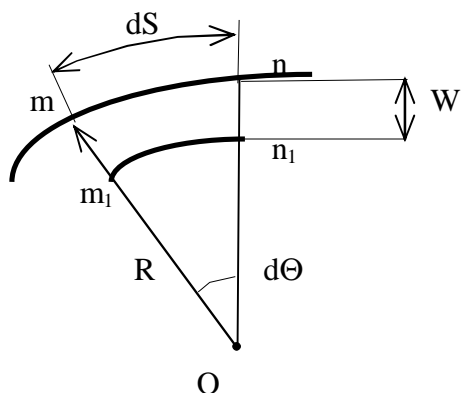
1) $W = 0$



Абсолютная деформация элемента dS равна dV , а относительная деформация

$$e' = \frac{dV}{dS} \quad (1)$$

2) $V = 0$. Бесконечно малой величиной dW пренебрегаем



до деформации

$$dS = R d\theta$$

после деформации

$$dS_1 = m_1 n_1 = (R - W) dq$$

Абсолютная деформация элемента dS

$$(R - W)dJ - Rdq = -Wdq$$

Относительная деформация:

$$e'' = -\frac{WdJ}{dS} = -\frac{WdJ}{RdJ} = -\frac{W}{R}, \quad (2)$$

т.к. $dS = R d\theta$.

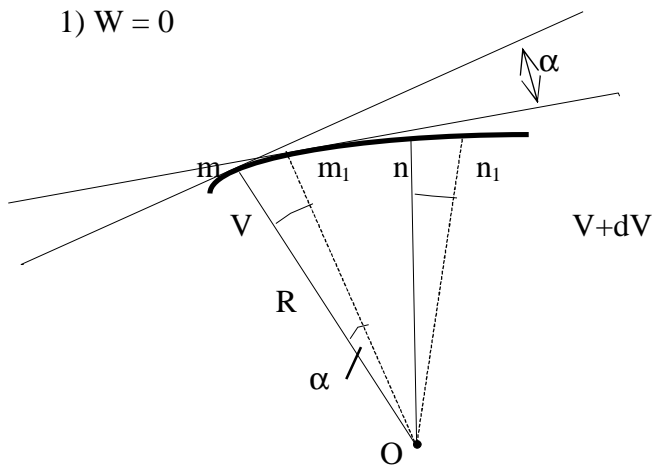
Полная относительная деформация элемента:

$$e = e' + e'', \quad e = \frac{dV}{dS} - \frac{W}{R} \quad (3)$$

Кривизна элемента до деформации

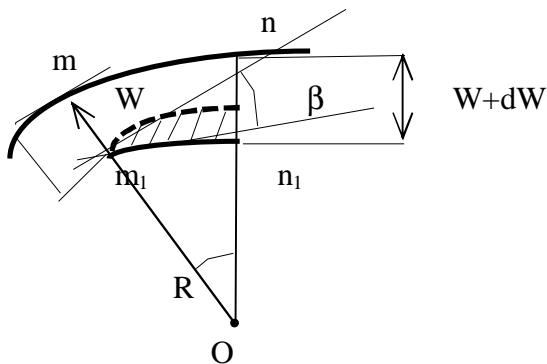
$$dS = R d\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{R} = \frac{dJ}{dS}$$

Определим изменение элемента за счет его деформации. Углы поворота касательных, проведенных к точке m :



$$a = \frac{V}{R}$$

2) $V = 0$



в этом случае пренебречь величиной dW нельзя

Заштрихованный треугольник ввиду малых величин можно считать прямолинейным, тогда:

$$b = \frac{dW}{dS}$$

Суммарный угол поворота касательной

$$j = \frac{V}{R} + \frac{dW}{dS} \quad (4)$$

Изменения кривизны деформированного элемента:

$$\frac{1}{h_b} = \frac{dj}{dS}$$

Продифференцируем выражение (4):

$$\frac{dj}{dS} = \frac{1}{R} \frac{dV}{dS} + \frac{d^2W}{dS^2} \quad (5)$$

Пренебрегая удлинением элемента dS , т.е. $\epsilon = 0$, из уравнения (3) имеем:

$$\frac{dV}{dS} = \frac{W}{R},$$

подставляя это значение в (5) и $dS = RdJ$.

$$\frac{dj}{dS} = \frac{W}{R^2} + \frac{d^2W}{R^2 dJ^2} = \frac{1}{r} \quad (6)$$

Из сопротивления материалов известно дифференциальное уравнение изогнутой оси бруса:

$$\frac{1}{r} = -\frac{M}{EJ}; \quad (7)$$

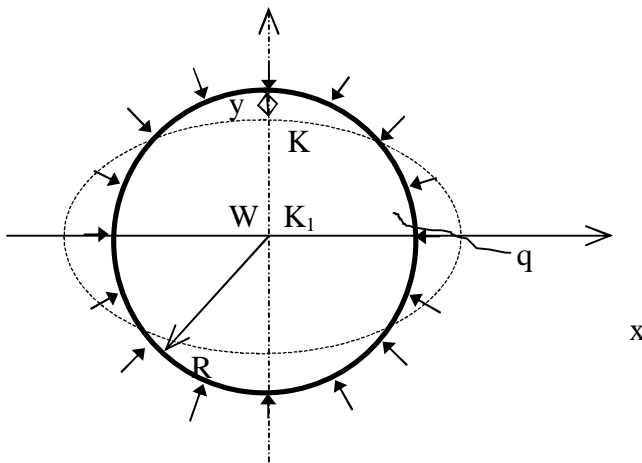
подставив (7) в (6) получим дифференциальное уравнение кривого бруса:

$$\frac{d^2W}{R^2 dJ^2} + \frac{W}{R^2} = -\frac{M}{EJ}$$

или

$$\boxed{\frac{d^2W}{dJ^2} + W = -\frac{MR^2}{EJ}} \quad (8)$$

2. Устойчивость кругового кольца при радиальной нагрузке

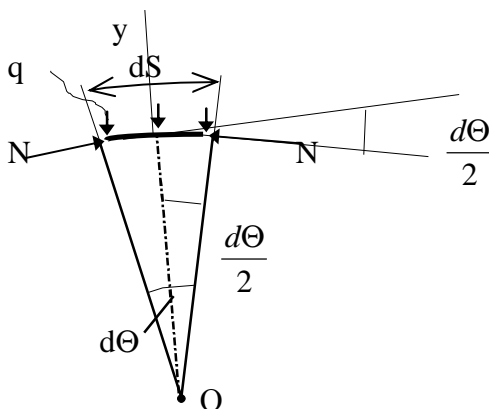


q - интенсивность равномерно распределенной радиальной нагрузки.

При $q < q_{кр}$ кольцо сохраняет первоначальную форму равновесия и в нем возникают только продольные усилия сжатия.

При $q \geq q_{кр}$ кольцо теряет устойчивую форму равновесия, приобретая овальную форму и в нем, наряду с продольными усилиями появляются изгибающие моменты.

Рассмотрим элемент dS до потери устойчивости:



$$\Sigma Y = 0$$

$$-qdS + 2N \cdot \sin \frac{d\theta}{2} = 0$$

ввиду малости угла θ

$$\sin \frac{d\theta}{2} = \frac{d\theta}{2}$$

тогда

$$-qdS + 2N \cdot \sin \frac{dq}{2} = 0, \quad dS = Rd\theta$$

$$-qRdq + Ndq = 0;$$

$$\boxed{N = qR} \quad (a)$$

После потери устойчивости точка К переместится в точку К₁, прогиб стенки кольца составляет W. В деформированном состоянии продольная сила вызывает в кольце изгибающий момент:

$$M = N \cdot W = qRW$$

Подставим это значение момента в дифференциальное уравнение бруса (8):

$$\frac{d^2W}{dJ^2} + W = -\frac{MR^2}{EJ},$$

$$\frac{d^2W}{dJ^2} + W = -\frac{qR^3W}{EJ}$$

или

$$\frac{d^2W}{dJ^2} + \left(1 + \frac{qR^3W}{EJ}\right)W = 0; \quad (б)$$

Обозначим

$$1 + \frac{qR^3W}{EJ} = K^2 \quad (c)$$

$$\frac{d^2W}{dq^2} + K^2W = 0 \quad (d)$$

Решение этого однородного дифференциального уравнения запишется:

$$W = C_1 \sin Kq + C_2 \cos Kq \quad (e)$$

Значение коэффициентов C₁ и C₂ найдем из граничных условий: учитывая, что на осях симметрии W'=0

$$1) \text{ при } \theta = 0 \quad \frac{dW}{dq} = 0$$

$$\frac{dW}{dq} = C_1 K \cos Kq - C_2 K \sin Kq$$

$$0 = C_1 K; \quad C_1 = 0$$

$$2) \text{ при } q = \frac{p}{2} \quad \frac{dW}{dq} = 0$$

$$0 = -C_2 \sin K \frac{p}{2}$$

$$C_2 = 0; \quad K = 0$$

Следовательно $\sin K \frac{p}{2} = 0$, а это возможно при :

- 1) $K = 0$ - противоречит условию задачи (см. выше)
- 2) $K=2$, $\sin \pi = 0$.

Из выражения (с) получаем

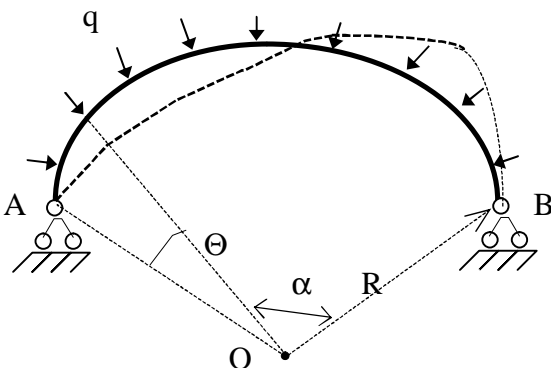
$$1 + \frac{qR^3}{EJ} = K^2 = 4,$$

отсюда

$$q_{кр} = \frac{3EJ}{R^3} \quad (f)$$

3. Устойчивость двухшарнирной круговой арки

Рассмотрим круговую арку загруженную равномерно распределенной радиальной нагрузкой q .



Дифференциальное уравнение кривого бруса по аналогии с кольцом

$$\frac{d^2W}{d\theta^2} + K^2W, \quad \text{где } K^2 = 1 + \frac{qR^3}{EJ}$$

Решение его:

$$W = C_1 \sin K\theta + C_2 \cos K\theta,$$

где θ - угол изменяющийся от 0 до α .

Граничные условия задачи:

- 1) при $\theta = 0$ $W = 0$;
 $0 = C_2$
- 2) при $\theta = \alpha$ $W = 0$;
 $0 = C_1 \sin K\alpha$; $C_1 \neq 0$

Следовательно $\sin K\alpha = 0$

$$Ka = p;$$

$$K = \frac{p}{a};$$

$$K^2 = \frac{p^2}{a^2};$$

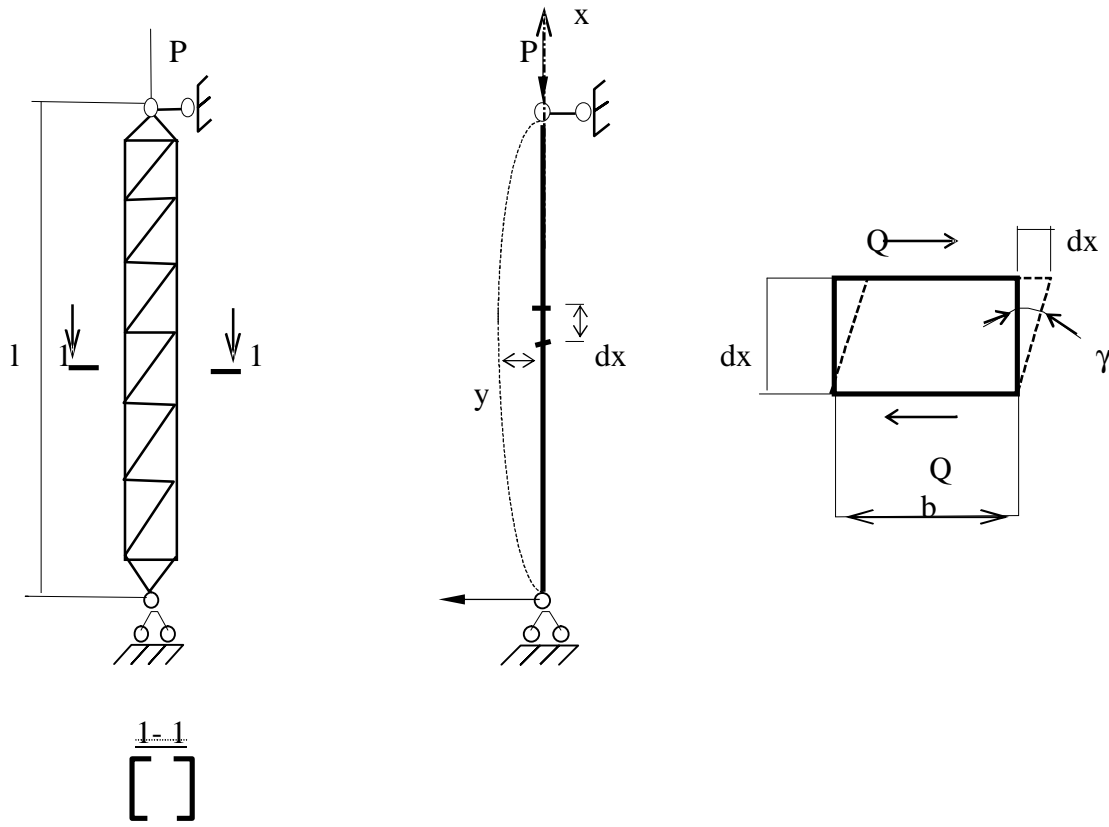
$$1 + \frac{qR^3}{EJ} = \frac{p^2}{a^2};$$

$$q_{кр} = \frac{\left(\frac{p^2}{a^2} - 1\right)EJ}{R^3}$$

Лекция 9

Устойчивость составных стержней (сквозных колонн)

Составные стержни, состоящие из отдельных ветвей, связанных планками или решеткой, обладают меньшей жесткостью, чем сплошные. Решетка воспринимает действие поперечных сил, влияние которых необходимо учитывать наряду с изгибающими моментами.



$M = Py$, потенциальная энергия изгиба:

$$U_M = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EJ} = \int_0^l \frac{P^2 y^2 dx}{2EJ} = \frac{P^2}{2EJ} \int_0^l Y^2 dx \quad (1)$$

Работа поперечных сил:

$$dU_Q = \frac{QdS}{2} = \frac{Qg}{2} dx,$$

где $dS = \gamma dx$

Относительный сдвиг $g = \frac{dS}{dx}$ при действии $Q=1$ обозначим через γ_1 , тогда

$$\gamma = Q \cdot \gamma_1$$

Потенциальная энергия, равная работе поперечных сил:

$$dU_Q = \frac{Q^2 g_1 dx}{2},$$

$$U_Q = \int_0^l dU_Q = \frac{g_1}{2} \int_0^l Q^2 dx,$$

если учесть, что $Q = \frac{dM}{dx} = P \frac{dy}{dx}$, то

$$U_Q = \frac{g_1 P^2}{2} \int_0^l (y')^2 dx \quad (2)$$

Работа внешних сил:

$$A = Pd = \frac{P}{2} \int_0^l (y')^2 dx, \quad (3)$$

$$\text{где } d = \frac{1}{2} \int_0^l (y')^2 dx$$

из выражения:

$$U_M + U_Q = A,$$

получим:

$$\frac{P}{2EJ} \int_0^l y^2 dx + \frac{g_1 P^2}{2} \int_0^l (y')^2 dx = \frac{P}{2} \int_0^l y^2 dx$$

или

$$\frac{P}{EJ} \int_0^l y^2 dx + g_1 P^2 \int_0^l (y')^2 dx = \int_0^l (y')^2 dx$$

Принимаем, что в момент потери устойчивости стержень искривляется по синусоиде

$y = a \sin \frac{px}{l}$, которая удовлетворяет граничным условиям задачи:

- 1) при $x = 0$; $y = 0$
- 2) при $x = l$; $y = 0$.

Тогда: $y' = \frac{ap}{l} \cos \frac{px}{l}$

$$\frac{Pa^2}{EJ} \int_0^l \sin^2 \frac{px}{l} dx + \frac{g_1 Pa^2 p^2}{l^2} \int_0^l \cos^2 \frac{px}{l} dx = \frac{a^2 p^2}{l^2} \int_0^l \cos^2 \frac{px}{l} dx$$

в результате получаем:

$$\frac{P}{EJ} \frac{l}{2} + \frac{g_1 p p^2}{l^2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{p^2}{l^2} \frac{l}{2}$$

$$P \left(\frac{1}{EJ} + \frac{g_1 p^2}{l^2} \right) = \frac{p^2}{l^2}$$

отсюда:

$$P_{кр} = \frac{\frac{p^2}{l^2}}{\frac{1}{EJ} + \frac{g_1 p^2}{l^2}}$$

умножим числитель и знаменатель на EJ

$$P_{кр} = \frac{\frac{p^2 EJ}{l^2}}{1 + \frac{g_1 p^2 EJ}{l^2}}$$

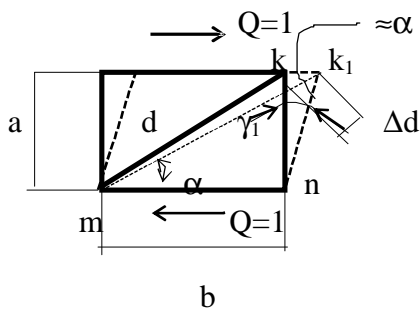
Обозначим

$$m^2 = \frac{1}{1 + \frac{g_1 p^2 EJ}{l^2}} \quad (4)$$

$$P_{кр} = \frac{p^2 EJ}{m^2 l^2} = \frac{p^2 EJ}{(ml)^2} \quad (5)$$

Чтобы определить значение коэффициента μ необходимо знать γ_1 , которое зависит от типа соединения отдельных ветвей стойки.

Рассмотрим стойку с ветвями соединенными решеткой



пусть длина раскоса d

$$g_1 = \frac{KK_1}{a}$$

поперечную силу воспринимает на себя раскос, удлинение которого:

$$\Delta d = \frac{N_p d}{EF_p}, \quad \text{где } N_p, F_p - \text{соответственно усилие и площадь сечения раскоса}$$

$$N_p = \frac{\bar{Q}}{\cos a} = \frac{1}{\cos a}$$

длина раскоса

$$d = \frac{a}{\sin a},$$

тогда

$$\Delta d = \frac{a}{EF_p \cos a \cdot \sin a},$$

кроме того

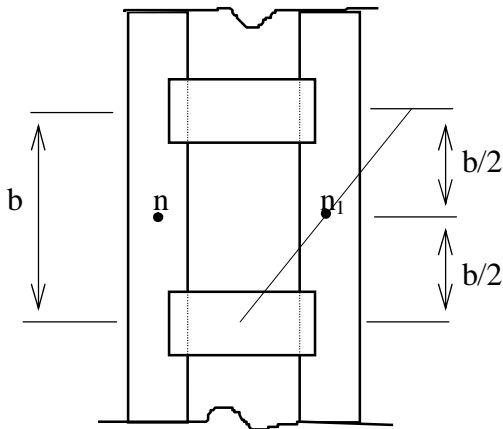
$$\Delta d = KK_1 \cdot \cos \alpha$$

или:

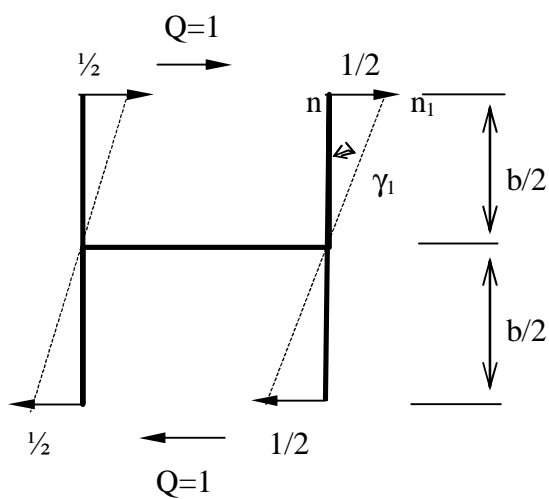
$$KK_1 = \frac{\Delta d}{\cos a} = \frac{a}{EF_p \cos^2 a \sin a}$$

$$g_1 = \frac{1}{EF_p \cos^2 a \sin a} \quad (6)$$

Рассмотрим стойку с ветвями соединенными планками

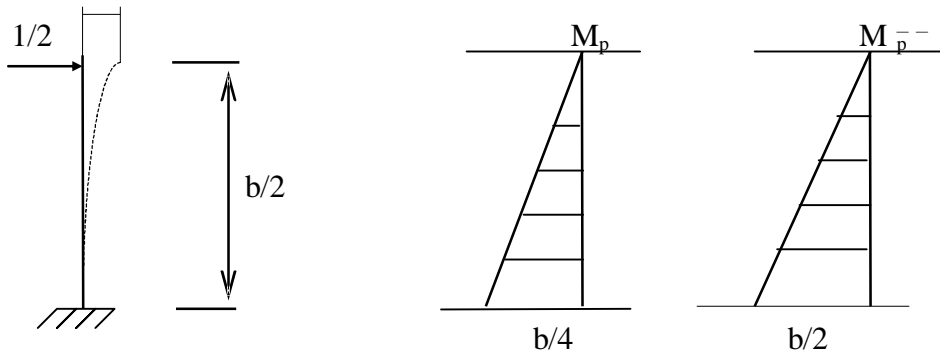


в точках n и n₁ изгибающие моменты = 0, действуют только поперечные силы



$$g_1 = tg \gamma_1 = \frac{2nn_1}{b} \quad (7)$$

$y_{\max} = nn_1$



$$y_{\max} = nn_1 = \frac{1}{EJ_B} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\epsilon}{2} \cdot \frac{\epsilon}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\epsilon}{2} = \frac{\epsilon^3}{48EJ_\epsilon}$$

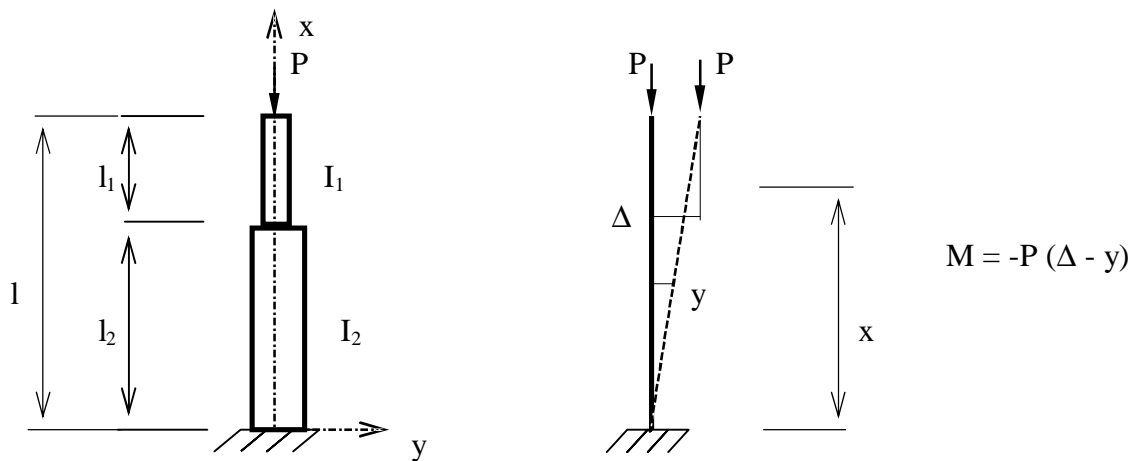
или

$$g_1 = \frac{2\epsilon^3}{48EJ_\epsilon\epsilon} = \frac{\epsilon^2}{24EJ_\epsilon}$$

где J_B - момент инерции одной ветви колонны.

Лекция 10

Расчет на устойчивость колонны ступенчатого сечения



Запишем дифференциальное уравнение оси стойки для каждого участка

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = -\frac{M}{EJ_1} \qquad \frac{d^2 y_2}{dx^2} = -\frac{M}{EJ_2}$$

тогда

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{P(\Delta - y_1)}{EJ_1}$$

или

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} + \frac{P y_1}{EJ_1} = \frac{P\Delta}{EJ_1}$$

аналогично

$$\frac{d^2 y_2}{dx^2} + \frac{P y_2}{EJ_2} = \frac{P\Delta}{EJ_2}$$

обозначим

$$K_1^2 = \frac{P}{EJ_1}; \quad K_2^2 = \frac{P}{EJ_2};$$

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} + K_1^2 y_1 = \frac{P\Delta}{EJ_1} \quad (1)$$

$$\frac{d^2 y_2}{dx^2} + K_2^2 y_2 = \frac{P\Delta}{EJ_2} \quad (2)$$

Общее решение дифференциального уравнения (1)

$$y_1 = C_1 \sin K_1 x + C_2 \cos K_1 x + \Phi_1 \quad (3)$$

частное решение $\Phi_1 = A$, подставим его в дифференциальное уравнение (1)

$$\frac{P}{EJ_1} A = \frac{P\Delta}{EJ_1}; \quad \Rightarrow \quad A = \Delta$$

$$y_1 = C_1 \sin K_1 x + C_2 \cos K_1 x + \Delta \quad (4)$$

аналогично

$$y_1 = d_1 \sin K_2 x + d_2 \cos K_2 x + \Delta \quad (5)$$

Определим коэффициенты уравнений (4) и (5) из граничных условий задачи:

$$\begin{aligned} 1) \text{ При } X = 0 \quad y_2 = 0 \\ 0 = d_2 + \Delta; \quad d_2 = -\Delta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \text{ При } X=l \quad y_1 = 0 \\ \Delta = C_1 \sin K_1 l + C_2 \cos K_1 l + \Delta \\ C_2 = -C_1 \cdot \operatorname{tg} K_1 l \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \text{ При } X = l_2 \quad y_1 = y_2 \\ C_1 \sin K_1 l_2 - C_1 \operatorname{tg} K_1 l \cos K_1 l_2 + \Delta = d_1 \sin K_2 l_2 - \Delta \cos K_2 l_2 + \Delta \\ C_1 \cos K_1 l_2 (\operatorname{tg} K_1 l_2 - \operatorname{tg} K_1 l) = d_1 \sin K_2 l_2 - \Delta \cos K_2 l_2 \quad (6) \end{aligned}$$

$$4) \text{ При } X = l_2 \quad \frac{dy_1}{dx} = \frac{dy_2}{dx}$$

$$\frac{dy_1}{dx} = C_1 K_1 \cos K_1 x - C_2 K_1 \sin K_1 x$$

$$\frac{dy_2}{dx} = d_1 K_2 \cos K_2 x - d_2 K_2 \sin K_2 x$$

$$C_1 K_1 \cos K_1 l_2 + K_1 C_1 \operatorname{tg} K_1 l \sin K_1 l_2 = d_1 K_2 \cos K_2 l_2 + \Delta K_2 \sin K_2 l_2$$

$$C_1 K_1 \cos K_1 l_2 (1 + \operatorname{tg} K_1 l \operatorname{tg} K_1 l_2) = d_1 K_2 \cos K_2 l_2 + \Delta K_2 \sin K_2 l_2; \quad (7)$$

Решая совместно уравнения (8) и (9) получим

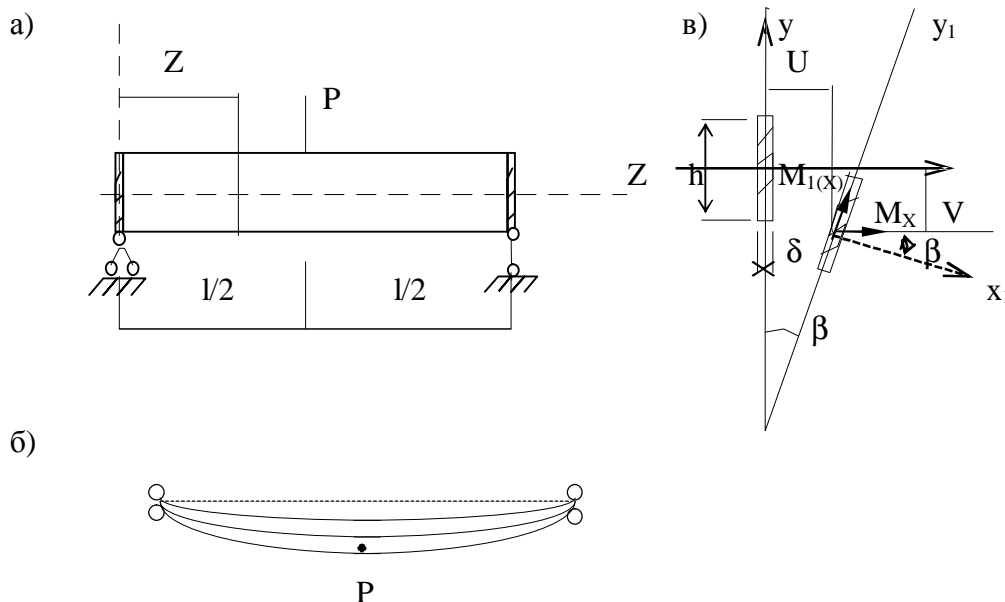
$$\operatorname{tg} K_1 l_1 \operatorname{tg} K_2 l_2 = \frac{K_1}{K_2} \quad (8)$$

Лекция 11

Потеря устойчивости плоской фермы изгиба тонкой полосы и двутавровой балки

Если тонкая и высокая балка прямоугольного сечения изгибается в главной плоскости с наибольшей жесткостью, то плоская форма изгиба за критическими нагрузками становится неустойчивой и происходит выпучивание балки.

Рассмотрим тонкую высокую балку, загруженную посередине пролета силой P



В самый начальный момент потери устойчивости некоторое сечение на расстоянии Z от левой опоры повернулось на малый угол β , т.е. его новая ось y_1 наклонена к вертикали под этим углом. Горизонтальное смещение средней линии сечения $= U$, вертикальное $= V$.

Т.е. в момент потери устойчивости, наряду с вертикальным изгибом, появляется изгиб балки в боковом направлении, а также ее кручение.

Определим дополнительную потенциальную энергию накапливаемую полосой в момент потери устойчивости, учитывая боковой изгиб и кручение полосы.

Момент, изгибающий полосу в боковом направлении

$$M_y = M_x \cdot \sin \beta,$$

учитывая, что угол β бесконечно мал $\sin \beta = \beta$

$$M_y = \frac{P}{2} Z \cdot b$$

Потенциальная энергия, накапливаемая в результате бокового изгиба

$$U_{My} = \int_0^l \frac{M_y^2 dz}{2EJ_y} = \frac{P^2}{8EJ_y} \int_0^l Z^2 b^2 dz,$$

где J_y - момент инерции сечения относительно оси Y .

Учитывая, что сила приложена посередине длины балки, возьмем интеграл на половине ее длины и результат удвоим

$$U_{My} = \frac{P^2}{4EJ} \int_0^{l/2} Z^2 b^2 dz \quad (1)$$

Определим потенциальную энергию, накапливаемую в полосе за счет ее кручения

$$b = \frac{M_{кр} l}{GJ_{кр}},$$

или

$$db = \frac{M_{кр} dz}{GJ_{кр}},$$

отсюда

$$M_{кр} = GJ_{кр} \frac{db}{dz}.$$

Потенциальная энергия в элементе бесконечно малой длины

$$dU_{кр} = \frac{M_{кр} db}{2},$$

$$dU_{кр} = \frac{GJ_{кр}}{2} \frac{db}{dz} db.$$

Умножим это выражение и разделим на dz

$$dU_{кр} = \frac{GJ_{кр}}{2} \left(\frac{db}{dz} \right)^2 dz.$$

Потенциальная энергия в полосе кручения

$$U_{кр} = \int_l dU_{кр} = \int_l \frac{GJ_{кр}}{2} \left(\frac{db}{dz} \right)^2 dz$$

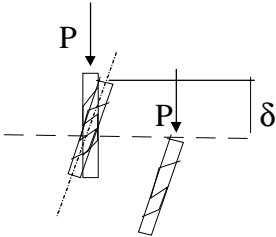
или

$$U_{кр} = GJ_{кр} \int_0^{l/2} \left(\frac{db}{dz} \right)^2 dz \quad (2)$$

Полная потенциальная энергия внутренних сил, накапливаемая полосой после потери устойчивости

$$U = U_{My} + U_{\kappa p} = \frac{P^2}{4EJ_y} \int_0^{l/2} z^2 b^2 dz + GJ_{\kappa p} \int_0^{l/2} \left(\frac{db}{dz} \right)^2 dz \quad (3)$$

Определим работу внешних сил в момент потери устойчивости полосой



Ввиду малости перемещений, работа внешних сил при повороте сечения = 0

Работа P на перемещении delta равна

$$A = P \cdot \delta,$$

без коэффициента 1/2 т.к. в момент потери устойчивости сила имеет свою постоянную величину.

Перемещение delta определим оп интегралу Мора:

$$d = \int_0^l \frac{\bar{M}'_y M_y dz}{EJ_y},$$

где M_y - момент, вызывающий боковой изгиб силой P : $M_y = \frac{P}{2} z b$;

\bar{M}'_y - то же единичной силой : $\bar{M}'_y = \frac{1}{2} z b$.

Тогда:

$$d = \int_0^l \frac{P}{4 E J_y} z^2 b^2 dz$$

или:

$$d = \frac{P}{2 E J_y} \int_0^{l/2} z^2 b^2 dz \quad (4)$$

Приравнивая потенциальную энергию внутренних сил работе внешних сил:

$$\frac{P^2}{4 E J_y} \int_0^{l/2} z^2 b^2 dz + G J_{\kappa p} \int_0^{l/2} \left(\frac{db}{dz} \right)^2 dz = \frac{P^2}{2 E J_y} \int_0^{l/2} z^2 b^2 dz$$

$$G J_{\text{кр}} \int_0^{l/2} \left(\frac{db}{dz} \right)^2 dz = \frac{P^2}{4 E J_y} \int_0^{l/2} z^2 b^2 dz$$

или

$$P^2 = \frac{4 E J_y \cdot G J_{\text{кр}} \int_0^{l/2} \left(\frac{db}{dz} \right)^2 dz}{\int_0^{l/2} z^2 b^2 dz} \quad (5)$$

Задаемся выражением для углов закручивания сечений, удовлетворяющих граничным условиям задачи:

$$b = A \sin \frac{pz}{l}, \quad \frac{db}{dz} = A \frac{p}{l} \cos \frac{pz}{l};$$

$$\begin{aligned} 1) \text{ при } z = 0 & \quad \beta = 0 \\ 2) \text{ при } z = l & \quad \beta = 0 \end{aligned}$$

$$P^2 = \frac{4 E J_y \cdot G J_{\text{кр}} A^2 \frac{p^2}{l^2} \int_0^{l/2} \cos^2 \frac{pz}{l} dz}{A^2 \int_0^{l/2} z^2 \sin^2 \frac{pz}{l} dz}$$

Вычислив интегралы:

$$P_{\text{кр}} = \frac{17,2}{l^2} \sqrt{E J_y \cdot G J_{\text{кр}}} \quad (6)$$

Точное решение

$$P_{\text{кр}} = \frac{16,93}{l^2} \sqrt{E J_y \cdot G J_{\text{кр}}}$$

Для двутаврового сечения:

$$P_{\text{кр}} = \frac{b}{l^2} \sqrt{E J_y \cdot E J_{\text{кр}}} \quad (7)$$

где β - коэффициент, определяемый по таблицам справочников.