Лекция 12

Основы динамики сооружений

Динамика сооружений - это специальный раздел строительной механики, посвященный методам расчета сооружений на динамические нагрузки.

Динамическими называются нагрузки, которые во время действия сообщают массам сооружения значительные ускорения, вызывая появление инерционных сил.

Классификация динамических нагрузок

1. Неподвижная периодическая нагрузка характерна тем, что она многократно повторяется через определенные промежутки времени. Периодическая нагрузка может быть как непрерывной, так и прерывной.

Если непрерывная периодическая нагрузка изменяется по закону синуса или косинуса, то такая нагрузка называется вибрационной или гармонической.

Создаются такие нагрузки различными механизмами, имеющими неуравновешенные массы вращающихся частей.

2. Кратковременная нагрузка характерна почти мгновенным действием, т.е. быстрым развитием и быстрым исчезновением (взрыв).

3. Ударная нагрузка характеризуется резким изменением скорости ударяемого тела. Ударную нагрузку создают падающие тела, всевозможные копры, молоты и т.д.

4. Подвижная нагрузка постоянного или переменного значения, меняющая свое положение на сооружении (поезда, автомобили, мостовые краны и т.д.).

5. Сейсмическая нагрузка - это беспорядочное движение почвы, толчки, удары и т.д.

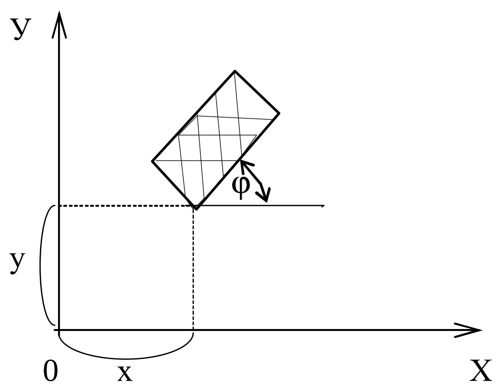
Динамический расчет сооружений состоит в определении внутренних усилий и перемещений от динамических нагрузок, значение и характер действия которых известны, или в проверке системы на резонанс при периодически повторяющейся нагрузке определенной частоты.

Степени свободы систем

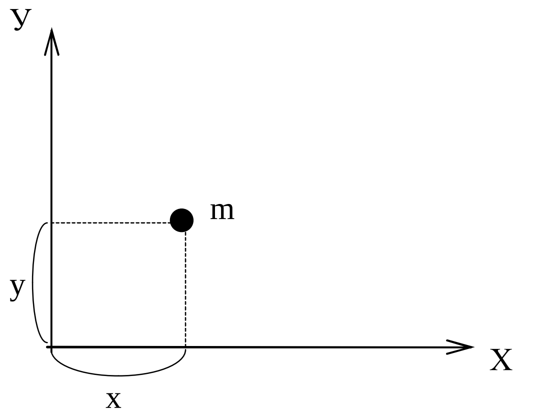
Системы в динамике сооружений разделяются по числу степеней свободы.

Степенью свободы системы называется число независимых геометрических параметров, определяющих положение всех масс конструкции в любой момент времени.

Положение любой массы на плоскости характеризуется тремя геометрическими параметрами или степенями свободы.

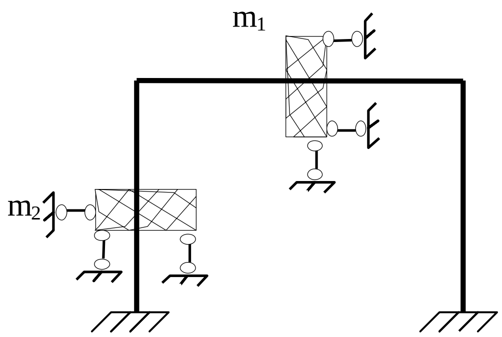


Если эту массу условно представить в виде точки, то ее положение на плоскости характеризуется двумя параметрами, а в пространстве - тремя.



Всякая распределенная масса на упругой деформируемой системе, представляемая как бесконечно большое количество бесконечно малых масс, будет иметь бесконечное число степеней свободы.

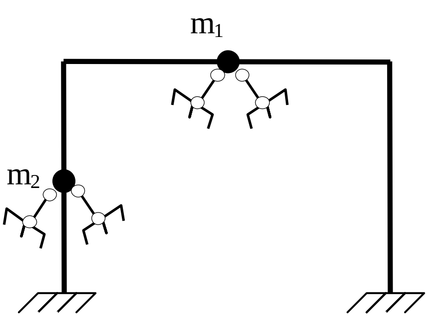
Для определения степени свободы системы необходимо каждую массу системы закрепить связями от всех возможных перемещений. Количество вводимых стержней и определяет степень свободы системы.



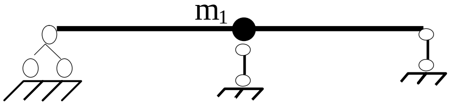
Масса рамы мала по сравнению с сосредоточенными массами, поэтому ней пренебрегают.

Ст. свободы = 6

Если пренебречь поворотами масс и считать их точечными.

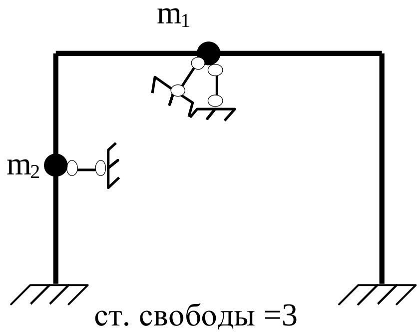


ст. свободы =4



ст. свободы =1

В практических расчетах часто пренебрегают перемещениями масс за счет растяжения или сжатия стержней, тогда



ст. свободы =3

Методы динамики сооружений

В динамике сооружений используют два основных метода исследований:

1. Кинематический метод, суть которого заключается в том, что конструкция в каждый момент времени рассматривается в равновесии под действием заданных динамических нагрузок и сил инерции всех ее масс.
2. Энергетический метод основан на исследовании полной потенциальной энергии системы с учетом инерционных сил.

Колебания систем с одной степенью свободы

Рассмотрим систему с одной степенью свободы в виде невесомой балки с сосредоточенной массой m.

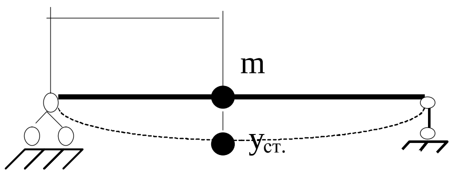
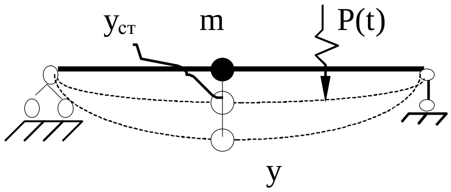


Рис. 1

$У_{ст}$ - прогиб балки в месте приложения массы при ее статическом действии

Пусть на балку действует динамическая нагрузка P (t).



У - прогиб из начального деформированного состояния за счет действия динамической нагрузки

Рис. 2

Для вывода дифференциального уравнения движения массы используем кинетостатический метод. Рассмотрим случай движения массы вниз от устойчивого состояния (рис. 2).

Покажем отдельно балку и массу с действующими на нее силами.

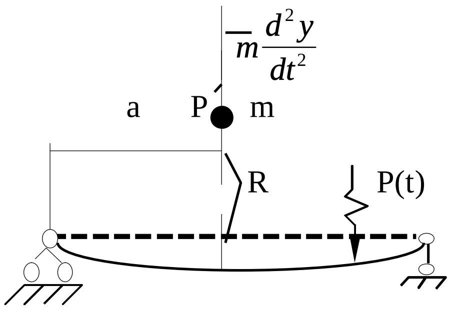


Рис. 3

R - реакция балки, пытающаяся вернуть балку в исходное состояние

P - сила сопротивления движению массы

$m\dfrac{d^2y}{dt^2}$ - сила инерции массы, которая направлена противоположно ускорению массы.

На основании принципа Даламбера, условие динамического равновесия массы запишется:

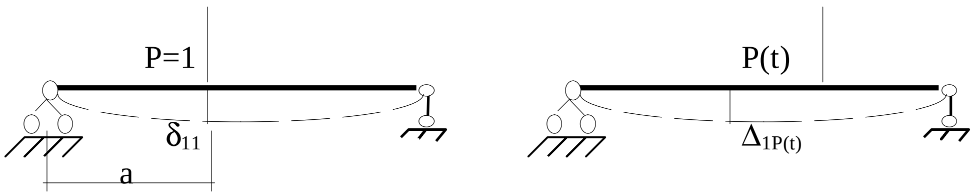
$$\sum y = 0; \qquad \Rightarrow \qquad R = m\frac{d^2y}{dt^2} + P \tag{1}$$

Запишем перемещение массы m через прогиб балки:

$$y = -d_{11}R + \Delta_{1P(t)} \tag{2}$$

где δ_{11} - перемещение балки в месте положения массы m от силы P=1, приложенной по направлению движения массы;

$\Delta_{1P(t)}$ - аналогичное перемещение от заданной динамической нагрузки.



Из выражения (2) определим реакцию балки R

$$R = -\frac{y}{d_{11}} + \frac{\Delta_{1P(t)}}{d_{11}} \tag{3}$$

Подставляем выражение (3) в (1)

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + P = -\frac{y}{d_{11}} + \frac{\Delta_{1P(t)}}{d_{11}}$$

разделим это уравнение на m

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{P}{m} = -\frac{y}{md_{11}} + \frac{\Delta_{1P(t)}}{md_{11}} \tag{4}$$

обозначим

$$\boxed{w^2 = \frac{1}{md_{11}}} \tag{5}$$

Тогда общее дифференциальное уравнение движения системы с одной степенью свободы запишется:

$$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + w^2y + \frac{P}{m} = w^2\Delta_{1P(t)}} \tag{6}$$

Свободные колебания систем без учета их сил сопротивления

Свободные колебания систем с одной степенью свободы без учета их сил сопротивления определяются по выражению:

$$P=0; \qquad P(t) = 0 \Rightarrow \qquad \Delta_{1P(t)} = 0$$

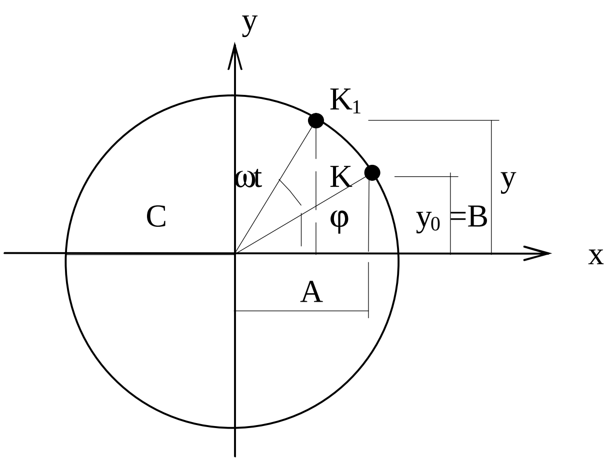
$$\frac{d^2y}{dt^2} + w^2 y = 0 \tag{7}$$

Решение дифференциального уравнение (7):

$$y = A \sin wt + B \cos wt \tag{8}$$

Из выражения (8) видно, что свободные колебания системы совершаются по гармоническому закону.

Рассмотрим для аналогии движение точки по окружности радиуса C, с постоянной угловой скоростью ω



$A = c \cos \varphi$
$B = c \sin \varphi$

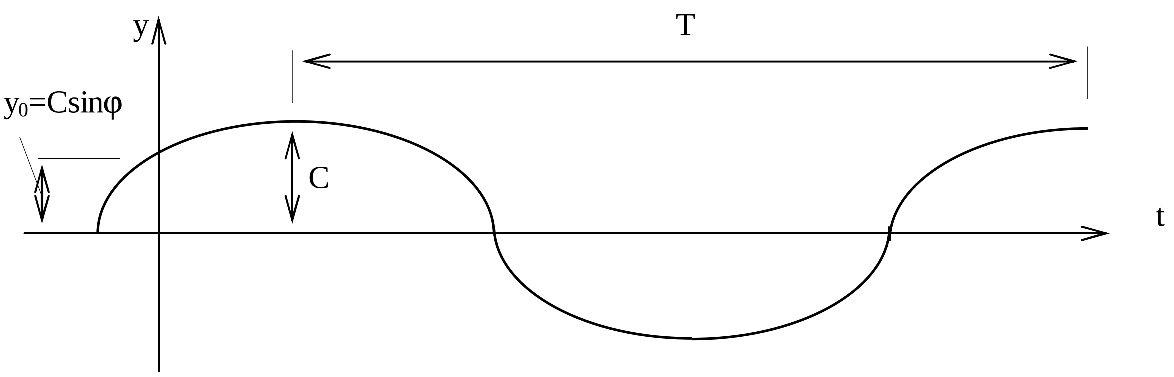
Тогда

$$y = c\left(\cos j \ \sin wt + \sin j \ \cos wt\right) = c \sin\left(wt + j\right)$$

что соответствует положению точки K_1 в момент времени t

$$\boxed{y = c \sin\left(wt + j\right)} \tag{9}$$

График функции (9) y = f(t) представляет собой синусоиду



где: φ - сдвиг фазы; С - амплитуда колебаний; Т - период колебаний; ω - круговая частота собственных колебаний.

Из выражения (5)

$$w = \sqrt{\frac{1}{m d_{11}}} \qquad \left[{}^{\text{р}ад}\!/\!_{сек}\right].$$

Сосредоточенная масса через вес записывается

G = m · g или $m = \dfrac{G}{g}$; $Gd_{11} = y_{cm}$; $d_{11} = \dfrac{y_{cm}}{G}$,

тогда:

$$w = \sqrt{\frac{g \cdot G}{G \cdot y_{cm}}}$$

или

$$\boxed{w = \sqrt{\frac{g}{y_{cm}}}} \tag{10}$$

Период колебаний:

$$\boxed{T = \frac{2p}{w}} \tag{11}$$

т.е. время за которое совершается цикл колебаний.

Вынужденные колебания систем с одной степенью свободы при действии вибрационной нагрузки

Вибрационную нагрузку создают машины с неуравновешенной вращающейся частью, масса которой имеет относительно оси вращения эксцентриситет ρ.

Во время движения неуравновешенной массы возникает центробежная сила, определяемая по формуле

$$P = m_0 q^2 r \tag{12}$$

где m_0 - масса неуравновешенной части, θ = угловая скорость вращения массы m_0.

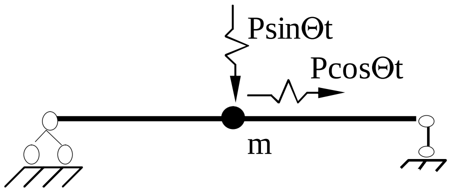
Если двигатель делает n оборотов в минуту, то угловая скорость будет определять и круговую частоту действующей нагрузки

$$q = \frac{2pn}{60} \quad (13)$$

где $n - {}^{об}\!/_{мин}$.

Если начало действия нагрузки считать от горизонтальной оси, то составляющие центробежной силы будут:

- вертикальная $P_y = P \sin \theta t$
- горизонтальная $P_x = P \cos \theta t$



Рассмотрим действие силы P sin θ t. Дифференциальное уравнение (6) в этом случае запишется:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + w^2 y = w^2 \Delta_{1P(t)} \ ,$$

где $w^2 = \dfrac{1}{md_{11}}$; $\Delta_{1P(t)} = d_{11} P \sin qt$

тогда:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + w^2 y = \frac{P \sin qt}{m} \quad (14)$$

где m - масса двигателя, включая и m_0.

Полное решение дифференциального уравнения (14):

$$y = A \sin \omega t + B \cos \omega t + Ф \quad (15)$$

где

$$Ф = С + Д \sin \theta t \quad (16)$$

$$Ф'' = -Дq^2 \sin qt$$

подставляя Ф и Ф’’ в уравнение (14) вместо y и $\dfrac{d^2y}{dt^2}$

$$-Дq^2 \sin qt + w^2\left(C + Д \sin qt\right) = \frac{P}{m} \sin qt \quad (17)$$

при t = 0 $w^2 C = 0$ т.к. $w \neq 0$ то С = 0

Подставляя С = 0 и разделив уравнение (17) на sin θt, получим:

$$-Дq^2 + w^2 Д = \frac{P}{m} \ ,$$

или

$$Д = \frac{P}{m\left(w^2 - q^2\right)} = \frac{P}{m\,w^2\left(1 - \frac{q^2}{w^2}\right)}\ .$$

из выражения:

$$w^2 = \frac{1}{md_{11}} \Rightarrow \qquad w^2 m = \frac{1}{d_{11}}\ ,$$

или

$$Д = \frac{P\,d_{11}}{1 - \frac{q^2}{w^2}}$$

тогда:

$$Ф = \frac{P\,d_{11}}{1 - \frac{q^2}{w^2}} \sin q\,t \qquad (18)$$

Общее решение дифференциального уравнения (14) запишется:

$$y = \underbrace{A \sin wt + B \cos wt}_{I} + \underbrace{\frac{Pd_{11}}{1 - \frac{q^2}{w^2}} \sin q\,t}_{II} \qquad (19)$$

Полное решение состоит из 2ˣ частей. I часть представляет собой решение однородного дифференциального уравнения и характеризует свободные колебания системы. При наличии самых незначительных сил сопротивления свободные колебания системы быстро затухают и остается IIя часть уравнения, которая представляет собой установившиеся вынужденные колебания при действии вибрационной нагрузки.

$$У_{дин} = \frac{P\,d_{11}}{1 - \frac{q^2}{w^2}} \sin q\,t \qquad (20)$$

Если обозначить $У_{ст(P)} = P\delta_{11}$ - прогиб от максимальной динамической нагрузки, при статическом ее действии, то

$$У_{дин} = \frac{У_{ст(P)}}{1 - \frac{q^2}{w^2}} \sin q\,t \qquad (21)$$

Максимальный динамический прогиб получим в том случае, если $\sin qt = 1$:

$$У^{\max}_{дин} = \frac{У_{ст(P)}}{1 - \frac{q^2}{w^2}}$$

обозначим:

$$\boxed{К_{дин} = \frac{1}{1 - \frac{q^2}{w^2}}} \qquad (22)$$

где $К_{дин}$ - динамический коэффициент при действии вибрационной нагрузки

$$\boxed{У_{дин}^{max} = К_{дин} \cdot У_{ст}}$$

Зная $К_{дин}$ мы можем рассчитывать систему на динамическую нагрузку как на статическую, если ее предварительно умножить на $К_{дин}$, т.е.

$$К_{дин} P \sin \theta t$$

Построим график изменения динамического коэффициента (по абсолютной величине) в зависимости отношения $\frac{\theta}{\omega}$, где ω - частота собственных колебаний; θ - вынужденные колебания.

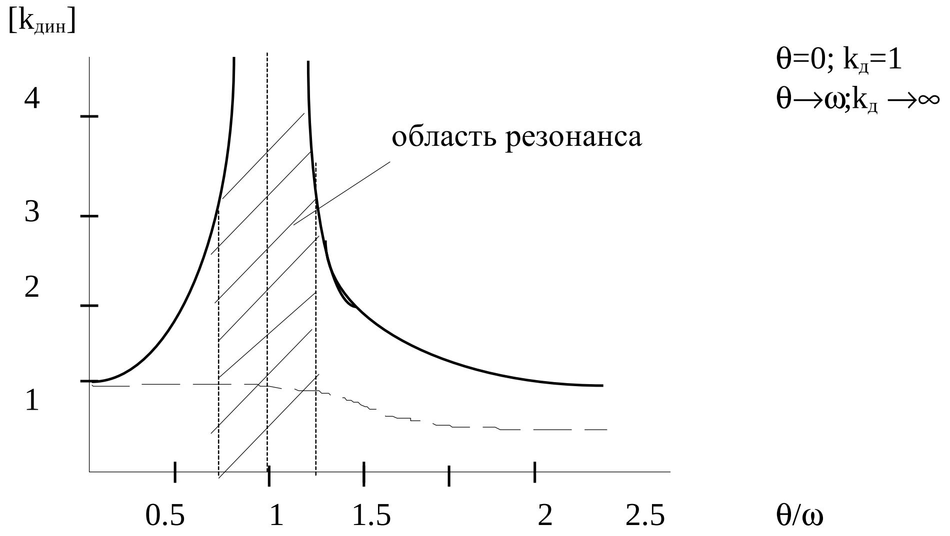


Рис. 1

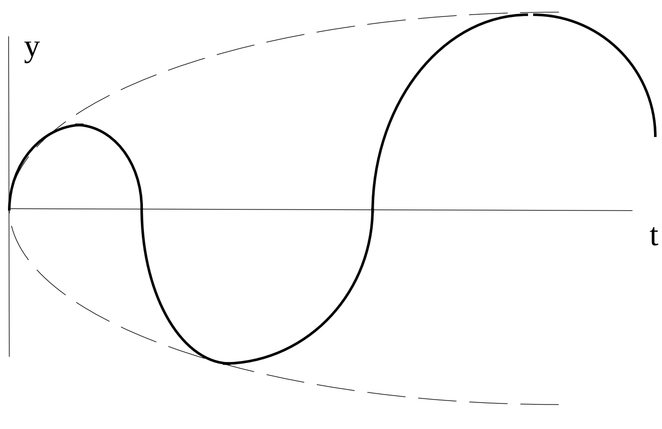


Рис. 2. График нарастания колебаний при резонансе

Из рис.1 и рис.2 видно, что если частота вынуждающей силы приближается к частоте свободных колебаний, то наступает явление резонанса. Резонансной считается область $0{,}7 < \frac{\theta}{\omega} < 1{,}3$.

При резонансе колебания неограниченно возрастают, что на практике приводит к разрушению сооружения.

Учитывая сказанное, в динамических расчетах всегда необходимо определять частоту свободных колебаний ω и сравнивать ее с частотой вынуждающей силы. Необходимо чтобы частота вынужденных колебаний θ была меньше частоты свободных колебаний ω, в противном случае при остановке и пуске двигателя возможно явление резонанса.

На практике требуется, чтобы $q \le 0,7w$.

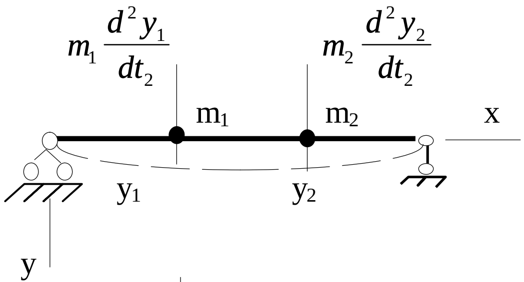
Для соблюдения этого условия обычно изменяют частоту свободных колебаний $w = \sqrt{\dfrac{g}{y_{ст}}}$, т.к. частоту вынужденных колебаний θ в большинстве случаев изменить нельзя.

Частота ω увеличивается при увеличении жесткости сооружения, уменьшении длин пролетов и т.п.

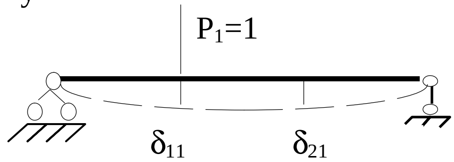
<u>Лекция 13</u>

<u>Свободные колебания систем с двумя степенями свободы</u>

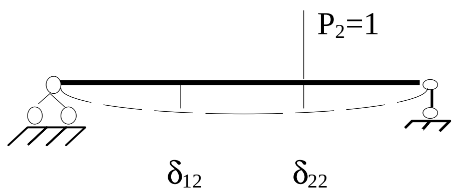
Системы с двумя степенями свободы являются частным случаем систем с несколькими степенями свободы. Но эти системы являются простейшими, позволяющими еще получить в конечном виде расчетные формулы для определения частот колебаний, амплитуд и динамических прогибов.



Прогибы балки от действия инерционных сил:



$$\begin{cases} y_1 = -m_1\dfrac{d^2y_1}{dt^2}d_{11} - m_2\dfrac{d^2y_2}{dt^2}d_{12} \\ y_2 = -m_1\dfrac{d^2y_1}{dt^2}d_{21} - m_2\dfrac{d^2y_2}{dt^2}d_{22} \end{cases} \qquad (1)$$



Знаки (-) в выражениях (1) вызваны тем, что инерционные силы и ед. перемещения имеют противоположное направление.

Считаем, что колебания масс совершаются по гармоническому закону:

$$\begin{cases} y_1 = A_1\sin\left(wt + j\right) \\ y_2 = A_2\sin\left(wt + j\right) \end{cases} \qquad (2)$$

Найдем ускорения движения масс:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 y_1}{dt^2} = -A_1 w^2 \sin(wt + j) \\ \dfrac{d^2 y_2}{dt^2} = -A_2 w^2 \sin(wt + j) \end{cases} \qquad (3)$$

Подставляя выражение (2) и (3) в уравнение (1) получим:

$$\begin{cases} A_1 \sin(wt + j) = m_1 d_{11} A_1 w^2 \sin(wt + j) + m_2 d_{12} A_2 w^2 \sin(wt + j) \\ A_2 \sin(wt + j) = m_1 d_{21} A_1 w^2 \sin(wt + j) + m_2 d_{22} A_2 w^2 \sin(wt + j) \end{cases} \qquad (4)$$

или

$$\begin{cases} A_1 = m_1 d_{11} A_1 w^2 + m_2 d_{12} A_2 w^2 \\ A_2 = m_1 d_{21} A_1 w^2 + m_2 d_{22} A_2 w^2 \end{cases} \qquad (5)$$

Неизвестными считаем амплитуды колебаний A_1 и A_2, преобразуем уравнения:

$$\begin{cases} \left(m_1 d_{11} w^2 - 1\right) + m_2 d_{12} w^2 A_2 = 0 \\ m_1 d_{21} w^2 A_1 + \left(m_2 d_{22} A_2 w^2 - 1\right) A_2 = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

Решение системы однородных уравнений $A_1 = A_2 = 0$ нас не устраивает, чтобы получит не нулевое решение прировняем нулю детерминант системы (6):

$$Д = \begin{vmatrix} \left(m_1 d_{11} w^2 - 1\right) & m_2 d_{12} w^2 A_2 \\ m_1 d_{21} w^2 A_1 & \left(m_2 d_{22} A_2 w^2 - 1\right) A_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (7)$$

или

$$\left(m_1 d_{11} w^2 - 1\right)\left(m_1 d_{22} w^2 - 1\right) - m_1 m_2 d_{12}{}^2 w^4 = 0 \qquad (8)$$

преобразуем уравнение (8), считая неизвестной круговую частоту собственных колебаний ω:

$$m_1 m_2 d_{12}{}^2 d_{22} w^4 - m_1 d_{12}{}^2 w^2 - m_2 d_{22} w^2 + 1 - m_1 m_2 d_{12}{}^2 w^4 = 0$$

$$\boxed{m_1 m_2 \left(d_{12} d_{22} - d_{12}^2\right) w^4 - \left(m_1 d_{11} + m_2 d_{22}\right) w^2 + 1 = 0} \qquad (9)$$

Уравнение (9) называется бигармоническим уравнением свободных колебаний систем с двумя степенями свободы.

Заменяя переменную $\omega^2 = Z$, получим

$$Z_{1,2} = \frac{\left(m_1 d_{11} + m_2 d_{22}\right) - \sqrt{\left(m_1 d_{11} + m_2 d_{22}\right)^2 - 4 m_1 m_2 \left(d_{11} d_{22} - d_{12}^2\right)}}{2 m_1 m_2 \left(d_{11} d_{22} - d_{12}^2\right)} \qquad (10)$$

отсюда определяем Z_1 и Z_2.

И далее:

$$w_1 = \left|\sqrt{Z_1}\right|; \qquad w_2 = \left|\sqrt{Z_2}\right|;$$

В результате можно сделать следующие выводы:

1. Свободные колебания систем с двумя степенями свободы происходят с двумя частотами ω_1 и ω_2. Более низкая частота ω_1 называется основной или основным тоном, более высокая частота ω_2 - называется второй частотой или обертоном.

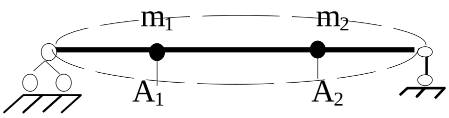
Свободные колебания систем с n-степенями свободы являются n-тонными, состоящими из n свободных колебаний.

2. Перемещения масс m_1 и m_2 выражаются следующими формулами:

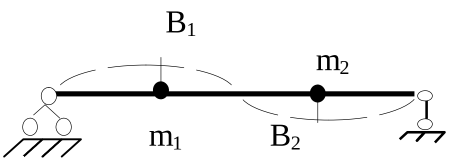
$$\begin{cases} y_1 = A_1 \sin\left(w_1 t + j_1\right) + B_1 \sin\left(w_2 t + j_2\right) \\ y_2 = A_2 \sin\left(w_1 t + j_1\right) + B_2 \sin\left(w_2 t + j_2\right) \end{cases},$$

причем $\frac{A_1}{A_2} \mathbf{f}\ 0;$ $\qquad \frac{B_1}{B_2} \mathbf{p}\ 0$

т.е., если колебания происходят с частотой ω_1, $\frac{A_1}{A_2} \mathbf{f}\ 0$, то в любой момент времени перемещения масс имеют одинаковые знаки.



Если колебания происходят только с частотой ω_2 , $\frac{B_1}{B_2} \mathbf{p}\ 0$, то перемещения масс в любой момент времени имеют противоположные знаки.



При одновременном колебании масс с частотами ω_1 и ω_2 система в основном колеблется по частоте ω_1 и в эти колебания вписывается обертон с частотой ω_2.

Если на систему с двумя степенями свободы действуют вынуждающая сила с частотой θ, то необходимо чтобы:

$$\theta < 0{,}7\ \omega_1 .$$

Лекция 14

Колебания систем с бесконечным числом степеней свободы.

Теория механических колебаний имеет многочисленные и весьма разнообразные приложения едва ли не во всех областях техники. Независимо от назначения и конструктивного решения различных механических систем их колебания подчиняются одним и тем же физическим закономерностям, изучение которых и составляет предмет теории колебаний упругих систем. Наиболее полно разработана линейная теория колебаний. Теория колебаний систем с несколькими степенями свободы была дана еще в XVIII веке Лагранжем в его классическом труде "Аналитическая механика".

Жозеф Луи Лагранж (1736 - 1813) - с 19-летнего возраста профессор математики в Турине. С 1759 года - член, а с 1766 года - президент Берлинской Академии наук; с 1787 года жил в Париже. В 1776 году был избран почетным иностранным членом Петербургской Академии наук.

В конце XIX века Рэлеем были заложены основы линейной теории колебаний систем с бесконечной степенью степеней свободы (т.е. с непрерывным распределением массы по всему объему деформируемой системы). В XX веке линейная теория, можно сказать, была завершена (метод Бубнова-Галеркина, который позволяет с помощью последовательных приближений определять также высшие частоты колебаний).

Джон Уильям Стретт (лорд Рэлей) (1842 - 1919) - английский физик, автор ряда работ по теории колебаний.

Иван Григорьевич Бубнов (1872 - 1919) - один из основоположников строительной механики корабля. Профессор Петербургского политехнического института, с 1910 года - Морской академии.

Борис Григорьевич Галеркин (1871- 1945) - профессор Ленинградского политехнического института.

Формула Рэлея наиболее популярна в теории колебаний и устойчивости упругих систем. Идея, лежащая в основе вывода формулы Рэлея, сводится к следующему. При моногармонических (однотонных) свободных колебаниях упругой системы с частотой ω, перемещения ее точек совершаются во времени по гармоническому закону:

$$u = f_1(x,y,z)\sin wt,$$
$$v = f_2(x,y,z)\sin wt,$$
$$w = f_3(x,y,z)\sin wt,$$

где $f_1(x,y,z)$, $f_2(x,y,z)$, $f_3(x,y,z)$ - функции пространственных координат точки, определяющие рассматриваемую форму колебаний (амплитудную).

Если эти функции известны, то частоту ω свободных колебаний можно найти из условия постоянства суммы кинетической и потенциальной энергии тела. Это условие приводит к уравнению, содержащему лишь одну неизвестную величину ω.

Однако указанные функции заранее неизвестны. Руководящая идея метода Рэлея состоит в том, чтобы задаваться этими функциями, сообразуя их выбор с граничными условиями и ожидаемой формой колебаний.

Подробнее рассмотрим реализацию этой идеи для плоских изгибных колебаний стержня, форма колебаний описывается функцией $f=f(x)$. Свободные колебания описываются зависимостью

$$v(x,t) = f(x)\sin wt, \tag{1}$$

потенциальная энергия изогнутого стержня

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^l EI\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2 dx, \qquad (2)$$

кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2}\int_0^l m\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 dx, \qquad (3)$$

где l - длина стержня, m=m(x) интенсивность распределенной массы стержня; $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ - кривизна изогнутой оси стержня; $\frac{\partial v}{\partial t}$ - скорость поперечных колебаний.

Учитывая (1)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = f'' \sin \omega t, \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = \omega f \cos \omega t .$$

Тогда

$$\Pi = \frac{1}{2}\sin^2 \omega t \int_0^l EI\left(f''\right)^2 dx, \qquad (4)$$

$$T = \frac{\omega^2}{2}\cos^2 \omega t \int_0^l m f^2 dx, \qquad (5)$$

С течением времени каждая из этих величин непрерывно меняется, но, согласно закону сохранения энергии их сумма остается постоянной, т.е.

$$\frac{d(\Pi + T)}{dt} = 0 \qquad (6)$$

или подставляя сюда выражения (4), (5)

$$\int_0^l EI\left(f''\right)^2 dx = \omega^2 \int_0^{\partial} m f^2 dx, \qquad (7)$$

Отсюда следует формула Рэлея:

$$\boxed{\omega^2 = \frac{\int_0^l EI\left(f''\right)^2 dx}{\int_0^{\partial} m f^2 dx}} \qquad (8)$$

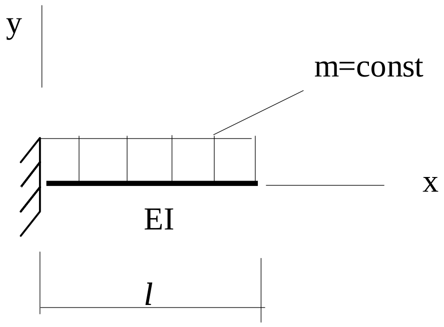
Если со стержнем с распределенной массой m, связаны сосредоточенные грузы с массами M_i, то формула Рэлея приобретает вид:

$$\boxed{\omega^2 = \frac{\int_0^l EI\left(f''\right)^2 dx}{\int_0^{\partial} m f^2 dx + \sum M_i f_i^2}} \qquad (9)$$

Как относиться к этой формуле - считать ее точной или приближенной?

Весь ход вывода показывает, что в рамках принятых допущений (справедливость технической теории изгиба стержней, отсутствия неупругих сопротивлений) эта формула точная, если $f(x)$ - истинная форма колебаний. Однако функция $f(x)$ заранее неизвестна. Практическое значение формулы Рэлея состоит в том, что с ее помощью можно найти собственную частоту ω, задаваясь формой колебаний $f(x)$. При этом в решение вносится более или менее серьезный элемент приближенности. По этой причине формулу Рэлея иногда называют приближенной.

Пример:



Примем в качестве формы колебаний функцию: $f(x)=ax^2$, которая удовлетворяет кинематическим граничным условиям задачи.

Определяем:

$$\int_0^l EI\left(f''\right)^2 dx = EI\int_0^l 4a^2\, dx = EI\,4a^2 l^2$$

$$\int_0^\partial mf^2 dx = \int_0^\partial ma^2 x^4 dx = \frac{ma^2 l^5}{5}$$

По формуле (8)

$$w^2 = \frac{20EI}{ml^4}.$$

Этот результат значительно отличается от точного

$$w^2 = \frac{12{,}36EI}{ml^4}.$$

Более точной является формула Граммеля, которая до сих пор еще не стала такой популярной, как формула Рэлея (возможно, вследствие своей относительной "молодости" - она предложена в 1939 году).

Снова остановимся на той же задаче о свободных изгибных колебаниях стержня.

Пусть $f(x)$ - задаваемая форма свободных колебаний стержня. Тогда интенсивность максимальных сил инерции определяется выражением $m\omega^2 f$, где по прежнему $m=m(x)$ - интенсивность распределенной массы стержня; ω^2 - квадрат собственной частоты. Эти силы достигают указанного значения в тот момент, когда прогибы максимальны, т.е. определяются функцией $f(x)$.

Запишем выражение наибольшей потенциальной энергии изгиба через изгибающие моменты, вызываемые максимальными силами инерции:

$$П = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2_{изг}\, dx}{EI}\ . \qquad (10)$$

Здесь $M_{изг} = M_{изг}(x)$ - изгибающие моменты, вызываемые нагрузкой $m\omega^2 f$. Обозначим $\overline{M}_{изг}$ - изгибающий момент, вызываемый условной нагрузкой mf, т.е. в ω^2 раз меньший, чем силы инерции.

Тогда:

$$M_{изг} = w^2 \overline{M}_{изг}, \qquad (11)$$

и выражение (10) можно записать в виде:

$$П = \frac{w^4}{2} \int_0^l \frac{\overline{M}^2_{изг} dx}{EI} . \qquad (12)$$

Наибольшая кинетическая энергия, как и выше

$$T = \frac{w^2}{2} \int_0^l m f^2 dx . \qquad (13)$$

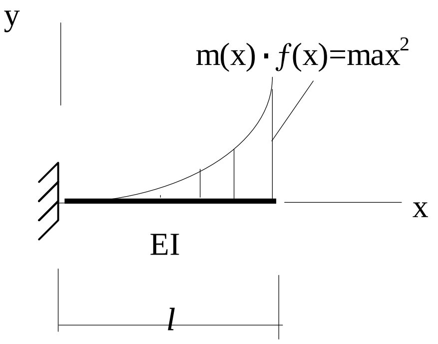
Приравнивая выражения (12) и (13) приходим к формуле Граммеля:

$$\boxed{w^2 = \frac{\int_0^l m f^2 dx}{\int_0^l \frac{\overline{M}^2_{изг} dx}{EI}}} \qquad (14)$$

Для вычислений по этой формуле необходимо прежде всего задаться подходящей функцией $f(x)$. После этого определяется условная нагрузка $mf = m(x)f(x)$ и записываются выражения $\overline{M}_{изг}$ вызываемые условной нагрузкой mf. По формуле (14) определяют частоту собственных колебаний системы ω.

Пример: (рассматриваем предыдущий)

Условная нагрузка: $m(x)=m=const$; $f(x)=ax^2$



$$\overline{M}_{изг} = \frac{ma}{12}\left(x^4 - 4xl^3 + 3l^4\right)$$

$$\int_0^l m f^2 dx = \int_0^l m a^2 x^4 dx = \frac{m a^2 l^5}{5}$$

$$\int_0^l \frac{\overline{M}_{изг}{}^2 dx}{EI} = \int_0^L \frac{m^2 a^2}{144 EI}\left(x^4 - 4xl^3 + 3l^4\right)^2 dx = \frac{13 m^2 a^2 l^9}{810 EI}$$

Находим:

$$w^2 = \frac{\int_0^l m f^2 dx}{\int_0^l \frac{\overline{M}^2_{изг} dx}{EI}} = \frac{m a^2 l^5 \cdot 810}{5 \cdot 13 m^2 a^2 l^3} = \frac{12.46 EI}{m l^4}$$

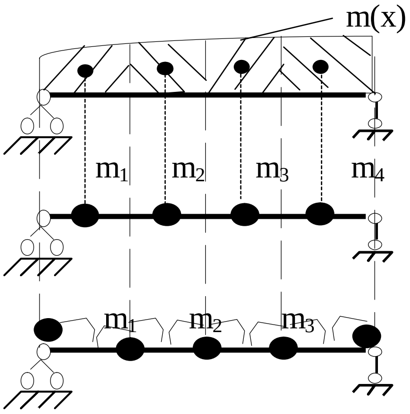
$$\boxed{w^2 = \frac{12.46 EI}{m l^4}}$$

Метод замены распределенных масс сосредоточенными.

Этот метод основан на идее приближенной замены системы с бесконечной степень свободы системой с конечной степенью, путем замены распределенной массы сосредоточенными, что может быть выполнено двумя способами.

По первому способу распределенная масса разбивается на участки, и на каждом участке распределенная масса заменяется сосредоточенной массой, располагаемой в центре тяжести участка (см. рис. а).

По второму способу массы на участках распределяются по закону рычага (рис. б)



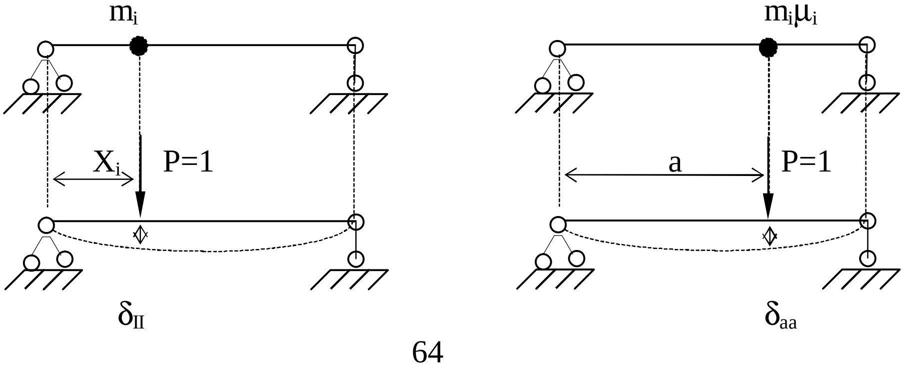
а)

б)

Часто второй способ дает более простую систему с меньшим числом степеней свободы, чем первый.

Метод переноса масс для определения первой частоты свободных колебаний.

Рассмотрим систему с одной степенью свободы, в виде невесомой балки с одной сосредоточенной массой m_i. Частота колебаний такой системы $w^2 = \frac{1}{m_i d_{ii}}$



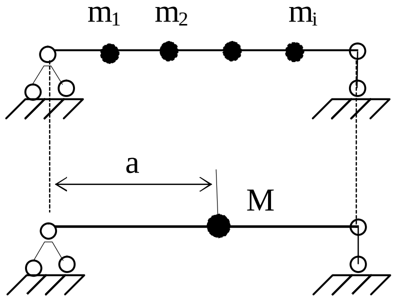
Перенесем массу m_i с некоторым поправочным коэффициентом в другое место на балке, получим новую систему с частотой $w^2 = \frac{1}{m_i m_i d_{ii}}$. Потребуем, чтобы обе системы имели одинаковую частоту, т.е.

$$\frac{1}{m_i d_{ii}} = \frac{1}{m_i m_i d_{aa}} \ .$$

Отсюда и получаем значение поправочного коэффициента μ_i при переносе массы с одного места на другое

$$m_i = {d_{ii}}/{d_{aa}} \ .$$

Если теперь мы имеем аналогичную систему с n степенями свободы, то собирая все массы в одну точку, заменим приближенно такую систему системой с одной степенью свободы.



$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i m_i = \sum_{i=0}^{n} m_i \left({d_{ii}}/{d_{aa}} \right)$$

Приближенно частота колебаний

$$w^2 = \frac{1}{M d_{aa}} = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i d_{ii}}$$

Обратная ей величина

$$\frac{1}{w^2} = \sum_{i=1}^{n} m_i d_{ii}$$

Формула весьма проста. Она не требует выбора места расположения приведенной массы M, ни определения ее величины, чем достигается однозначность решения. Достоинство формулы еще и в том, что она всегда дает заниженное значение определяемой частоты, как говорят, дает приближение снизу.

Недостаток формулы состоит в том, что она иногда дает грубое приближение.

Если наряду с сосредоточенными массами система имеет распределенные массы, то формула для определения частоты собственных колебаний запишется

$$\frac{1}{w^2} = \sum_{i=1}^{n} m_i d_{ii} = \int_l m(x) d_{xx} dx$$

где d_{xx} - перемещение бесконечно малой массы m(x)dx от единичной силы, приложенной в точке с координатой x.