

ДОРОГИЕ ЮНОШИ И ДЕВУШКИ !

Московский государственный университет имени Н.Э. Баумана готовит специалистов по всем современным областям науки и экономики, способных осуществлять исследования и разработку новой техники, материалов и технологий на уровне, превышающем лучшие мировые достижения.

Если Вы хотите получить ЗНАНИЯ и успешно сдать вступительные экзамены в МГУ или другие технические вузы, приходите на **ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫЕ КУРСЫ**.

Занятия проводятся 3 раза в неделю по математике, физике, русскому языку и литературе.

ПРИЕМ НА КУРСЫ С 1 СЕНТЯБРЯ.

ЗАНЯТИЯ НА КУРСАХ ЗАКАНЧИВАЮТСЯ 20 МАРТА.
С 23 ПО 31 МАРТА ПРОВОДЯТСЯ ТЕСТОВЫЕ ЭКЗАМЕНЫ.

В весенние каникулы ежедневно работают экспресс-курсы.
Действуют заочные курсы со сроком обучения 1 и 2 года.

Наш адрес: Москва, 2-я Бауманская ул., дом 5, комната 201а.

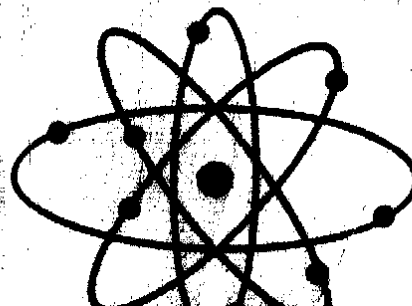
ТЕЛЕФОН ДЛЯ СПРАВОК: 263 - 64 - 22.

ФИЗИКА

ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ

Часть II

СОСБИЕ ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В ВУЗЫ



Дорогой друг!

Оцифрованный вариант второй части данного пособия для поступающих в ВУЗы облегчит Вам задачу поиска этой ставшей популярной среди абитуриентов книги.

Материал книги изложен таким образом, что теория и методы решения задач (в том числе 7х задач, предлагаемых на вступительном экзамене в МГТУ им. Баумана) будут интересны абитуриентам не только со средним и высоким уровнем подготовки, но и понятны абитуриентам с невысоким уровнем.

Книга эта - хороший помощник. Но мой Вам совет: просто прочитать решение задачи недостаточно, попробуйте самостоятельно прорешать подобные задачи, уже не заглядывая в книгу. Не надейтесь на то, что на экзамене у Вас будет возможность достать распечатки этого файла размерами 2смХ3см, хотя такая возможность у Вас будет. Попробуйте понять методы, логику решения. Поверьте, физика - не просто предмет, который необходимо сдать на отл. на вступительных экзаменах в МГТУ, физика - это фундамент для формирования будущего инженера. Чем больше Вы сделаете сегодня, тем меньше вам придется делать завтра.

Успехов Вам на экзаменах!
С уважением, \$e®_gun.

Вопросы можно задавать на e-mail: ser_gun@mstu.ru
icq: 100804070

Заходите на неофициальный сайт МГТУ им. Баумана <http://www.mstu.ru> .

З.Ы. Благодарности принимаю в любом виде после Вашего поступления в МГТУ им. Баумана ;).

Содержание

	Стр.
Глава 8. Электростатика.....	3
8.1. Электрический заряд и его свойства.....	3
8.2. Закон Кулона.....	3
8.3. Электростатическое поле.....	4
8.4. Работа и потенциал электростатического поля.....	7
8.5. Проводники и диэлектрики в электростатическом поле.....	10
8.6. Емкость. Плоский конденсатор.....	13
8.7. Примеры решения задач.....	16
Глава 9. Законы постоянного тока.....	39
9.1. Электрический ток.....	39
9.2. Сопротивление проводника. Закон Ома для однородного участка цепи. Последовательное и параллельное соединение проводников.....	40
9.3. Работа и мощность тока.....	42
9.4. Закон Ома для замкнутой электрической цепи.....	43
9.5. Правила Кирхгофа.....	45
9.6. Электрический ток в жидкостях. Законы электролиза.....	47
9.7. Электрический ток в газах. Плазма.....	48
9.8. Электрический ток в полупроводниках.....	49
9.9. Примеры решения задач.....	52
Глава 10. Магнитное поле. Электромагнитная индукция.....	74
10.1. Основные магнитные явления.....	74
10.2. Вектор магнитной индукции.....	74
10.3. Линии магнитной индукции.....	75
10.4. Магнитное поле прямого тока.....	76
10.5. Магнитное поле в центре кругового тока.....	76
10.6. Магнитное поле соленоида.....	77
10.7. Принцип суперпозиции магнитных полей. Закон Био-Савара-Лапласа.....	77
10.8. Сила Ампера.....	78
10.9. Сила Лоренца.....	79
10.10. Магнитные свойства вещества.....	80
10.11. Магнитный поток.....	81
10.12. Закон электромагнитной индукции.....	82
10.13. Электродвижущая сила самоиндукции.....	83
10.14. Вихревое электрическое поле. ЭДС индукции в движущихся проводниках. Энергия магнитного поля тока.....	84
10.15. Примеры решения задач.....	85
Глава 11. Колебания. Переменный электрический ток.....	113
11.1. Основные свойства колебательных процессов.....	113
11.2. Гармонические колебания.....	114
11.3. Скорость и ускорение тела, совершающего гармонические колебания.....	115
11.4. Пружинный маятник.....	116
11.5. Математический маятник.....	119
11.6. Свободные электромагнитные колебания в колебательном контуре.....	120
11.7. Вынужденные колебания. Резонанс.....	122
11.8. Переменный электрический ток в цепи, содержащей резистор. Действующие значения тока и напряжения.....	122
11.9. Переменный электрический ток в цепи, содержащей конденсатор. Емкостное сопротивление.....	124
11.10. Переменный электрический ток в цепи, содержащей катушку индуктивности. Индуктивное сопротивление.....	126
11.11. Метод векторных диаграмм. Мощность переменного тока.....	129
11.12. Трансформатор.....	129
11.13. Примеры решения задач.....	131
Глава 12. Геометрическая оптика.....	161
12.1. Световой луч.....	161
12.2. Законы геометрической оптики.....	161
12.3. Полное (внутреннее) отражение света.....	163
12.4. Изображение в плоском зеркале.....	164
12.5. Тонкие линзы.....	164
12.6. Изображение в тонкой линзе. Формула тонкой линзы.....	167
12.7. Фотоаппарат.....	168
12.8. Зрение. Очки.....	169
12.9. Примеры решения задач.....	170
Глава 13. Волны. Волновая и квантовая оптика.....	196
13.1. Основные свойства волновых процессов.....	196
13.2. Волновые свойства света.....	196

13.3. Квантовые свойства света.....	200
13.4. Законы фотоэффекта. Уравнение Эйнштейна.....	201
13.5. Примеры решения задач.....	203
Глава 14. Элементы теории относительности. Атомная и ядерная физика.....	229
14.1. Постулаты теории относительности.....	229
14.2. Основные формулы теории относительности.....	229
14.3. Строение атома. Постулаты Бора.....	232
14.4. Энергия стационарных состояний атома водорода..	233
14.5. Строение атомного ядра.....	235
14.6. Радиоактивность. Закон радиоактивного распада. Энергия связи ядра.....	236
14.7. Ядерные и термоядерные реакции.....	238
14.8. Деление ядер урана. Цепная реакция. Ядерный реактор.....	239
14.9. Примеры решения задач.....	240

ББК 23. Я 729

К 60

Колесников В.А. Физика. Теория и методы решения конкурсных задач. Часть II. Пособие для поступающих в вузы. М.: Учебный центр "Ориентир" – "Светоч Л", 1999. 262с.

Аннотация

Во второй части данного пособия изложены основные теоретические сведения по электродинамике, колебаниям, оптике и атомной физике. Подробно разобраны конкурсные задачи по указанным разделам от простейших до задач повышенной сложности. Рассмотрены некоторые идеи и подходы для решения задач повышенной сложности. Большое внимание уделено методам решения задач средней сложности, составляющих основную часть на вступительных экзаменах по физике.

Для учащихся старших классов средней школы, слушателей подготовительных отделений и курсов, а также лиц, самостоятельно готовящихся к вступительным экзаменам по физике.

Автор надеется, что пособие будет полезным для учащихся с различным уровнем подготовки.

ISBN 5-93022-010-7

Учебное издание

Владимир Александрович Колесников

Физика. Теория и методы решения конкурсных задач. Часть II.
Пособие для поступающих в вузы

© Учебный центр "Ориентир" при МГТУ, 1999.

Компьютерный набор и верстка Воронина О.С.
Редактор Бойцова Н.Г. – *самма ты Таймзон!!!*
Издается при участии ООО Светоч Л
ЛР №07164 от 06.05.98г.

Подписано в печать 30.11.98г. Формат 84x108/32,
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Усл. печ. л. 14,3.
Физ. печ. л. 8,5. Уч. – изд. л. 11,5. Тираж 5000 экз. Зак. №

Глава 8. Электростатика

8.1. Электрический заряд и его свойства

Тела в природе способны электризоваться, т. е. приобретать электрический заряд. Наличие электрического заряда проявляется в том, что заряженное тело взаимодействует с другими заряженными телами. Существует два вида зарядов: положительные и отрицательные. Заряды одного знака отталкиваются, а разных знаков – притягиваются. В электростатике изучают свойства неподвижных зарядов и электрических полей, ими создаваемых.

Существует минимальный электрический заряд, который называют элементарным. Им обладает элементарная частица – электрон. Заряд электрона $e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Заряд другой элементарной частицы – протона равен $|e| = +1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Тело заряжено в том случае, когда оно содержит избыточное количество элементарных частиц с одним знаком заряда. Заряд любого тела кратен элементарному

$$q = \pm N|e|, \quad (8.1)$$

где N – натуральное число. Величина заряда не зависит от скорости его движения.

Важнейшим законом электростатики является закон сохранения заряда: в замкнутой системе алгебраическая сумма зарядов всех частиц остается неизменной.

8.2. Закон Кулона

Заряженное тело, размерами которого можно пренебречь по сравнению с расстояниями до других заряженных тел, называют точечным зарядом.

Взаимодействие точечных зарядов описывается законом Кулона: сила взаимодействия двух неподвижных точечных зарядов в вакууме пропорциональна произведению модулей зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними.

$$F_K = k \frac{|q_1||q_2|}{r^2} \quad (8.2)$$

Здесь q_1 и q_2 – величины зарядов, r – расстояние между ними, k – коэффициент пропорциональности. В системе СИ $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, где $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная. Таким образом, в системе СИ $k = 9 \cdot 10^9$ Н·м²/Кл².

Силы взаимодействия между точечными зарядами направлены вдоль прямой, соединяющей заряды, и являются силами притяжения, если заряды противоположного знака, и силами отталкивания, если заряды одного знака. На рис. 8.1 изображено, как взаимодействуют два точечных заряда q_1 и q_2 противоположных знаков.

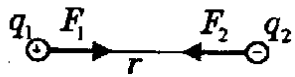


Рис. 8.1

q_2 противоположных знаков.

Отметим, что в соответствии с третьим законом Ньютона

$$F_1 = F_2 = F_K.$$

8.3. Электростатическое поле

Неподвижные заряды создают в пространстве электростатическое поле. Главное свойство электростатического поля – его действие на помещенные в это поле электрические заряды с некоторой силой. Количественной характеристикой электростатического поля является напряженность \vec{E} .

Напряженность электростатического поля есть векторная величина, равная отношению силы, действующей на точечный заряд q , внесенный в поле, к этому заряду

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_K}{q} \quad (8.3)$$

Из (8.3) следует, что действующая на заряд со стороны поля сила

$$\vec{F}_K = q\vec{E} \quad (8.4)$$

Если $q > 0$, то направление вектора напряженности совпадает с направлением силы \vec{F}_K , действующей на заряд; если

$q < 0$, то сила \vec{F}_K направлена противоположно вектору напряженности \vec{E} .

Напряженность поля не зависит ни от заряда q , внесенного в поле, ни от силы \vec{F}_K , действующей на него со стороны поля. Напряженность определяется зарядами, создающими поле, и расстоянием до точек пространства, в которых оно изучается.

Вычислим напряженность электростатического поля, создаваемого точечным зарядом Q . В точку, расположенную от заряда Q на расстоянии r , внесем точечный заряд q . На этот заряд со стороны поля действует сила, модуль которой вычисляется по закону Кулона

$$F_K = k \frac{|Q||q|}{r^2}.$$

Модуль напряженности $E = \frac{F_K}{q}$.

Окончательно
$$E = k \frac{|Q|}{r^2} \quad (8.5)$$

В случае, когда поле создается не одним, а несколькими зарядами, для вычисления напряженности \vec{E} используют принцип суперпозиции полей, согласно которому

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n, \quad (8.6)$$

где $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \dots, \vec{E}_n$ – напряженности, создаваемые каждым зарядом в рассматриваемой точке.

Если заряд не является точечным, то он может распределяться по объему заряженного тела, по поверхности, а также по некоторой линии. В первом случае распределение характеризуется объемной плотностью заряда

$$\rho = \frac{Q}{V},$$

где Q – заряд, а V – объем, по которому этот заряд распределен.

Во втором случае распределение заряда описывают поверхностной плотностью заряда

$$\sigma = \frac{Q}{S}$$

(8.7)

где Q – заряд, а S – площадь, по которой этот заряд распределен.

В третьем случае говорят о линейной плотности заряда

$$\lambda = \frac{Q}{l},$$

где Q – заряд, а l – длина линии, по которой этот заряд распределен.

Три введенные величины описывают равномерное распределение заряда.

Равномерно заряженная сфера радиусом R , на поверхности которой распределен заряд Q , создает электростатическое поле. Пусть r – расстояние, отсчитываемое от центра сферы. При $r < R$ (точки расположены внутри сферы) напряженность

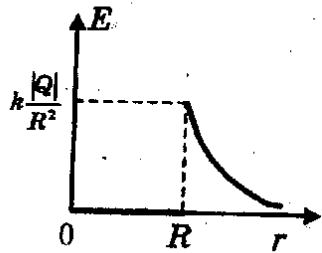


Рис. 8.2

$\vec{E} = 0$. При $r > R$ (точки вне сферы) $E = k \frac{|Q|}{r^2}$. График зависимости $E(r)$ представлен на рис. 8.2.

Бесконечная равномерно заряженная плоскость создает по обе стороны поле, одинаковое по модулю и направлению. Такое поле называют однородным. Модуль

напряженности этого поля

$$E = \frac{|\sigma|}{2\epsilon_0}$$

(8.8)

где σ – поверхностная плотность заряда.

Для качественного описания электростатического поля используют силовые линии (линии напряженности).

Силовая линия электростатического поля – это линия, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением вектора \vec{E} . Силовые линии на рисунках проводят, придерживаясь следующих правил:

1. Густота силовых линий (число линий на единицу площади) пропорциональна напряженности.
2. Силовые линии электростатического поля не замкнуты: они начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных;

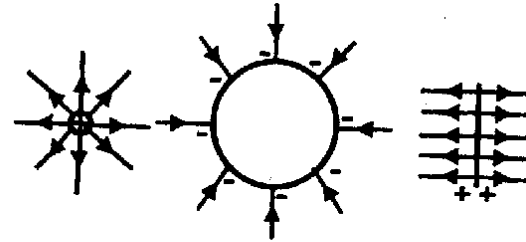


Рис. 8.3

если отрицательных зарядов нет, то силовые линии, начинаясь на положительных зарядах, уходят на бесконечность; если отсутствуют

заряды, то силовые линии оканчиваются на отрицательных зарядах, приходя из бесконечности.

3. Силовые линии электростатического поля не пересекаются.

На рис. 8.3 изображены силовые линии положительного точечного заряда, отрицательно заряженной (равномерно) сферы, положительно заряженной бесконечной плоскости.

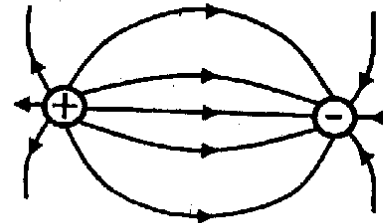


Рис. 8.4

така, равными по модулю.

На рис. 8.4 изображены силовые линии поля, создаваемого двумя точечными зарядами противоположного

8.4. Работа и потенциал электростатического поля

При перемещении заряда q в электростатическом поле сила, действующая на заряд со стороны поля, совершает работу. Работа силы электростатического поля не зависит от траектории движения заряда и определяется лишь начальной и конечной точками движения. Если заряд перемещается по замкнутой траектории, то работа равна нулю. Следовательно, сила электро-

статического поля (ее называют кулоновской силой) является консервативной (потенциальной) подобно гравитационной силе и силе упругости. Электростатическое поле – поле консервативных сил. Заряд q , внесенный в это поле, обладает потенциальной энергией W_p , которая пропорциональна величине заряда.

Потенциалом электростатического поля называют отношение потенциальной энергии заряда в поле к этому заряду.

$$\boxed{\varphi = \frac{W_p}{q}} \quad (8.9)$$

Потенциал – скалярная величина, которая не зависит от заряда, внесенного в поле. Наряду с напряженностью потенциал является характеристикой поля. Он зависит только от зарядов, создающих поле, и от расстояния до точек пространства, в которых изучается поле.

Потенциальную энергию заряда q можно выразить как

$$\boxed{W_p = q\varphi} \quad (8.10)$$

Работа консервативных сил

$$A = -\Delta W_p = -(W_{p2} - W_{p1}) = W_{p1} - W_{p2},$$

где W_{p1} и W_{p2} – начальное и конечное значения потенциальной энергии. Следовательно, при перемещении заряда q в электростатическом поле из точки с потенциалом φ_1 в точку с потенциалом φ_2 совершается работа $A = q\varphi_1 - q\varphi_2$, или

$$\boxed{A = q(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (8.11)$$

Величину $(\varphi_1 - \varphi_2)$ называют разностью потенциалов или напряжением.

Значение потенциальной энергии и потенциала в данной точке зависит от выбора нулевого уровня отсчета. Например, потенциальная энергия двух точечных зарядов Q и q , расположенных на расстоянии r , равна

$$\boxed{W_p = k \frac{Qq}{r} + C} \quad (8.12)$$

где C – постоянная величина. Ее выбирают так, чтобы при $r \rightarrow \infty$ $W_p = 0$. Этому условию удовлетворяет $C = 0$.

Пусть точечный заряд Q создает поле. Вычислим потенциал поля в точке, расположенной на расстоянии r от этого заряда. По формуле (8.12) найдем энергию заряда q , внесенного в

поле: $W_p = k \frac{Qq}{r}$, а затем по формуле (8.9) определим потенциал поля точечного заряда:

$$\boxed{\varphi = k \frac{Q}{r}} \quad (8.13)$$

Потенциал точки, удаленной от заряда Q на очень большое расстояние ($r \rightarrow \infty$), равен нулю.

Для нахождения потенциала поля φ , создаваемого несколькими зарядами, используют принцип суперпозиции

$$\boxed{\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n} \quad (8.14)$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ – потенциалы, создаваемые зарядами в рассматриваемой точке.

Сфера радиусом R с равномерно распределенным зарядом на ее поверхности создает вне ее ($r > R$) потенциал $\varphi = k \frac{Q}{r}$. Внутри сферы и на ее поверхности ($r \leq R$) потенциал

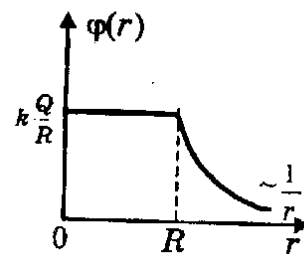


Рис. 8.5

во всех точках одинаков и равен $\varphi = k \frac{Q}{R}$ (равен потенциалу поверхности). График зависимости $\varphi(r)$ для $Q > 0$ приведен на рис. 8.5.

Потенциал поля, создаваемого бесконечной равномерно заряженной плоскостью, изменяется по линейному закону в зависимости от расстояния до плоскости.

пример, для плоскости, заряженной положительно,

$$\varphi(x) = \varphi_0 - Ex, \quad (8.15)$$

где φ_0 – потенциал плоскости, E – модуль напряженности, x – расстояние от плоскости.

Из формулы (8.15) следует, что потенциал электростатического поля убывает в направлении силовых линий. Это утверждение справедливо для любого электростатического поля.

Напряженность однородного электростатического поля вычисляется по формуле

$$E = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{d} = \frac{u}{d} \quad (8.16)$$

где $(\Phi_1 - \Phi_2)$ – разность потенциалов (напряжение) между точками поля, расположенными на расстоянии d вдоль силовой линии.

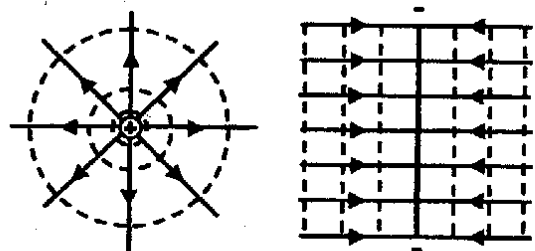


Рис. 8.6

Еще одним способом качественного описания электростатического поля является проведение эквипотенциальных поверхностей. Эквипотенциальная поверхность (в случае

плоскости – эквипотенциальная линия) – это поверхность, потенциал всех точек которой одинаков. На рисунках эквипотенциальные поверхности проводят через равное число вольт. Важно отметить, что эквипотенциальные поверхности перпендикулярны силовым линиям. На рис. 8.6 изображены картины силовых линий и эквипотенциальных поверхностей (пунктирная линия) для положительного точечного заряда и отрицательно заряженной плоскости.

В случае точечного заряда эквипотенциальные поверхности – сферы, в случае заряженной плоскости – плоскости.

8.5. Проводники и диэлектрики в электростатическом поле

В проводниках, к которым в первую очередь относятся металлы, имеются заряженные частицы, способные перемещаться внутри проводника под действием электрического поля. Такие частицы называют свободными зарядами. В металлах свободными зарядами являются электроны. В 1см^3 металла содержится

коло 10^{23} свободных электронов. Поэтому проводники в электростатическом поле проявляют следующие свойства.

1. На концах незаряженного проводника после внесения его электростатическое поле индуцируются (наводятся) заряды противоположных знаков. Это явление называют электростатической индукцией.

2. Электростатическое поле внутри как заряженного проводника, так и проводника, внесенного во внешнее поле, равно нулю.

3. Заряд проводника располагается на его поверхности.

4. Все точки поверхности проводника имеют одинаковый потенциал.

5. Силовые линии электростатического поля перпендикулярны поверхности проводника.

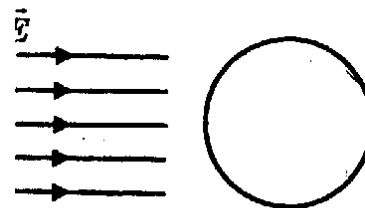


Рис. 8.7

Рассмотрим случай, когда незаряженный металлический шар вносят в однородное поле (рис. 8.7). На поверхности шара под действием внешнего поля возникают (индуцируются) заряды противоположных знаков.

По принципу суперпозиции результирующее поле в любой точке есть векторная сумма внешнего поля \vec{E} и поля \vec{E}_i , созданного наведенными зарядами.

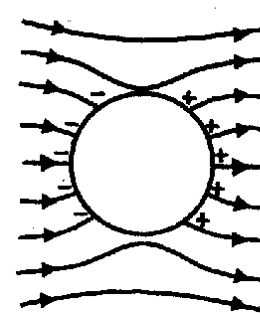


Рис. 8.8

Внутри шара результирующая напряженность равна нулю. Вне шара образуется поле, силовые линии которого перпендикулярны поверхности шара. Картина результирующего поля представлена на рис. 8.8.

В диэлектриках также присутствуют свободные электроны, однако их концентрация составляет $10^3 \div 10^6 \text{см}^3$, т.е. значительно меньше, чем в металлах. Атомы и молекулы состоят из положительно заряженных частиц – ядер и отрицательно заряженных частиц – электронов. Ядра и электроны в нейтральных атомах образуют связанные заряды, которые



Рис. 8.9

не могут под действием электрического поля свободно перемещаться по диэлектрику. В неполярном диэлектрике центры распределения положительных и отрицательных зарядов в молекуле совпадают, в полярном диэлектрике – не совпадают. Молекула полярного диэлектрика представляет собой диполь – электронейтральную систему двух точечных зарядов, равных по модулю и противоположных по знаку, и находящихся на некотором расстоянии друг от друга.

Внешнее электростатическое поле заставляет электроны смещаться против поля, положительные ядра – по направлению поля, т.е. из неполярного диэлектрика становится полярным. Внешнее поле оказывает также ориентирующее воздействие как на полярные, так и на неполярные молекулы: их связанные заряды смещаются в противоположные стороны, их собственное поле направлено против внешнего. Это явление называется поляризацией диэлектрика (рис. 8.9).

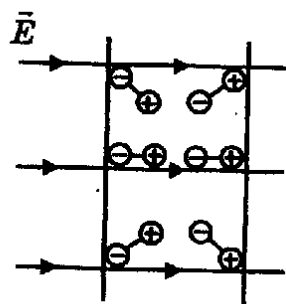


Рис. 8.10

Тепловое движение препятствует тому, что все молекулы будут ориентированы так, как показано на рис. 8.9. В результате на поверхности диэлектрика возникает связанный заряд. Внутри диэлектрика связанный заряд равен нулю (рис. 8.10).

Электрическое поле в диэлектрике существует, причем его напряженность в ϵ раз меньше напряженности поля в вакууме. ϵ – диэлектрическая проницаемость среды ($\epsilon > 1$).

Сила взаимодействия точечных зарядов, расположенных внутри диэлектрика, в ϵ раз меньше, чем в вакууме. Напряженность и потенциал, создаваемые системами зарядов, находящимися внутри диэлектрика, также уменьшаются в ϵ раз по сравнению и вакуумом.

8.6. Электроемкость. Плоский конденсатор

Электроемкостью проводника называют отношение заряда проводника Q к его потенциалу ϕ

$$C = \frac{Q}{\phi} \quad (8.17)$$

Опыт показывает, что заряд проводника пропорционален его потенциалу. Поэтому электроемкость не зависит ни от заряда, ни от потенциала и определяется формой и размерами проводника. В частности, шар радиусом R и зарядом Q имеет потенциал поверхности $\phi = k \frac{Q}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$, поэтому его электроемкость

$$C = 4\pi\epsilon_0 R \quad (8.18)$$

Электроемкостью двух проводников называют отношение заряда одного из проводников к разности потенциалов между этими проводниками

$$C = \frac{|Q|}{|\phi_1 - \phi_2|} = \frac{|Q|}{|U|} \quad (8.19)$$

Плоский конденсатор представляет собой две параллельные пластины, разделенные слоем диэлектрика, толщина которого мала по сравнению с размерами пластин.

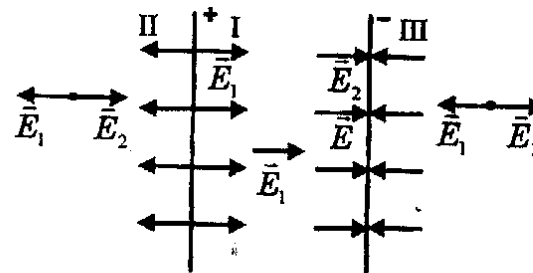


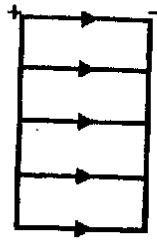
Рис. 8.11

При зарядке конденсатора одна из его пластин (обкладок) получает положительный заряд, другая – равный по модулю отрицательный заряд.

Зарядом конденсатора называют абсолютную величину заряда одной из пластин.

Пусть S – площадь одной из пластин, тогда поверхностная плотность заряда на каждой из пластин

$$|\sigma| = \frac{|Q|}{S}$$



В вакууме каждая пластина создает поле с напряженностью $E_1 = E_2 = \frac{|\sigma|}{2\epsilon_0}$. Результирующее поле пластин находим по принципу суперпозиции $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ (рис. 8.11).

Сложение векторов \vec{E}_1 и \vec{E}_2 в областях II и III (вне пластин) приводит к результату $\vec{E} = 0$. В области I (внутри конденсатора) напряженность удваивается по сравнению с напряженностью, создаваемой одной пластиной.

$$E = 2E_1 = \frac{|\sigma|}{\epsilon_0} \quad (8.20)$$

Результирующее поле изображено на рис. 8.12. Поскольку поле в конденсаторе оказалось однородным, то его напряженность можно рассчитывать по формуле

$$E = \frac{u}{d} \quad (8.21)$$

где u — разность потенциалов (напряжение на конденсаторе), d — расстояние между пластинами.

Емкость плоского конденсатора

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad (8.22)$$

Когда все пространство между обкладками конденсатора заполнено диэлектриком, емкость возрастает в ϵ раз

$$C' = \epsilon C = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{d} \quad (8.23)$$

Заряженный конденсатор обладает энергией, которую вычисляют по формулам

$$W_P = \frac{qu}{2} = \frac{Cu^2}{2} = \frac{q^2}{2C} \quad (8.24)$$

Единица объема, в котором сосредоточено поле конденсатора, обладает энергией

$$\omega = \frac{W_P}{V} = \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2} \quad (8.25)$$

Эта величина называется плотностью энергии электростатического поля. Формула (8.25) справедлива для любых электростатических полей.

Конденсаторы можно соединить последовательно и параллельно.

При последовательном соединении (рис. 8.13):

1. Заряды конденсаторов одинаковы:

$$q_1 = q_2 = \dots = q_n$$

2. Напряжение на конденсаторах равно сумме напряжений на конденсаторах: $u = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

3. Емкость батареи последовательно соединенных конденсаторов вычисляется по формуле

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \quad (8.26)$$

где C_i — емкость конденсаторов.

При $n = 2$ удобно пользоваться формулой

$$C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$$

При $C_1 = C_2 = \dots = C_n = C_0$ (емкости всех конденсаторов равны C_0)

$$C = \frac{C_0}{n}$$

При параллельном соединении конденсаторов (рис. 8.14):

1. Заряд батареи равен сумме зарядов конденсаторов:

$$q = q_1 + q_2 + \dots + q_n$$

2. Напряжения на конденсаторах одинаковы:

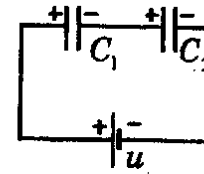


Рис. 8.13

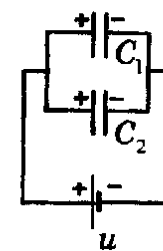


Рис. 8.14

$$u_1 = u_2 = \dots = u_n = u$$

3. Емкость батареи параллельно соединенных конденсаторов

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n \quad (8.27)$$

8.7. Примеры решения задач

Задача 8.1. Четыре положительных заряда q, Q, q, Q связаны четырьмя нитями, как показано на рис. 8.15. Определить углы между нитями.

Решение.

Так как нити имеют одинаковую длину l , то заряды расположены в вершинах ромба, углы которого α и β . По теореме косинусов меньшая диагональ ромба

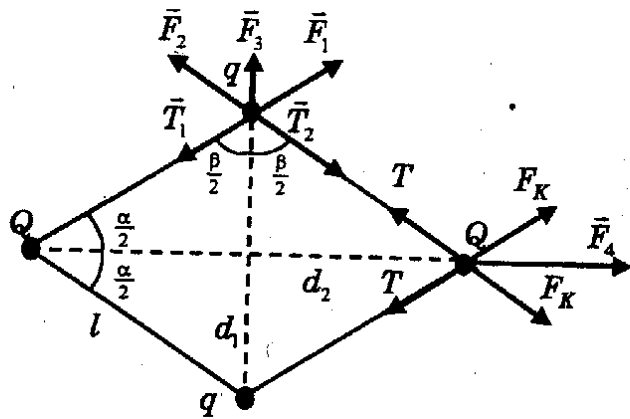


Рис. 8.15

$$d_1^2 = 2l^2 - 2l^2 \cos \alpha = 2l^2 (1 - \cos \alpha) = 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

Аналогично выражаем большую диагональ

$$d_2^2 = 2l^2 - 2l^2 \cos \beta = 4 \sin^2 \frac{\beta}{2}$$

На заряд q действуют кулоновские силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 со стороны зарядов Q . Модули этих сил одинаковы, по закону Кулона

$$F_1 = F_2 = F_K = k \frac{|q||Q|}{l^2} = k \frac{qQ}{l^2} \quad (|q|=q, |Q|=Q, \text{ так как по условию } Q > 0 \text{ и } q > 0).$$

Кроме того, на заряд q действует сила отталкивания \vec{F}_3 со стороны другого заряда q , причем

$$F_3 = k \frac{q^2}{d_1^2} = k \frac{q^2}{4 \sin^2 \alpha/2}$$

И, наконец, к заряду q приложены силы натяжения нитей \vec{T}_1 и \vec{T}_2 , модули которых равны T , что является следствием симметрии рассматриваемой системы. Спроецировав указанные силы на меньшую диагональ и учитывая, что заряд q находится в равновесии, получаем уравнение:

$$2F_K \cos \frac{\beta}{2} + F_3 - 2T \cos \frac{\beta}{2} = 0 \Rightarrow F_3 = 2(T - F_K) \cos \frac{\beta}{2} \quad (1)$$

К заряду Q со стороны зарядов q приложены: две одинаковые по модулю силы $F_K = k \frac{qQ}{l^2}$, две силы натяжения нити, модули которых равны T , и сила отталкивания \vec{F}_4 со стороны другого заряда Q , причем $F_4 = k \frac{Q^2}{d_2^2} = k \frac{Q^2}{4 \sin^2 \beta/2}$. Спроецировав эти силы на большую диагональ, получим:

$$2F_K \cos \frac{\alpha}{2} + F_4 - 2T \cos \frac{\alpha}{2} = 0 \Rightarrow F_4 = 2(T - F_K) \cos \frac{\alpha}{2} \quad (2)$$

Разделим уравнение (1) на уравнение (2), тогда

$$\frac{F_3}{F_4} = \frac{\cos \beta/2}{\cos \alpha/2}$$

Подставляя значения F_3 и F_4 , получаем

$$\frac{q^2 \sin^2 \beta/2}{Q^2 \sin^2 \alpha/2} = \frac{\cos \beta/2}{\cos \alpha/2}$$

Так как $\beta + \alpha = \pi$, то $\frac{\beta}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$ и $\cos \beta/2 = \cos(\pi/2 - \alpha/2) = \sin \alpha/2$, а $\sin^2 \beta/2 = \cos^2 \alpha/2$. Тогда

$$\frac{q^2 \cos^2 \alpha/2}{Q^2 \sin^2 \alpha/2} = \frac{\sin \alpha/2}{\cos \alpha/2} \Rightarrow \left(\frac{q}{Q}\right)^2 = \operatorname{tg}^3 \alpha/2 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha/2 =$$

$$= \sqrt[3]{\left(\frac{q}{Q}\right)^2} = \left(\frac{q}{Q}\right)^{2/3} \Rightarrow \alpha/2 = \operatorname{arctg} \left(\frac{q}{Q}\right)^{2/3} \Rightarrow \alpha = 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{q}{Q}\right)^{2/3} \text{ и}$$

$$\beta = \pi - \alpha.$$

Задача 8.2. Два одинаковых заряженных шарика, подвешенных на нитях одинаковой длины, опускаются в керосин. Какова должна быть плотность шариков, чтобы угол расхождения нитей в воздухе и керосине был одинаков? Диэлектрическая проницаемость керосина $\epsilon = 2$, плотность керосина $\rho = 800 \text{ кг/м}^3$ (рис. 8.16 и 8.17).

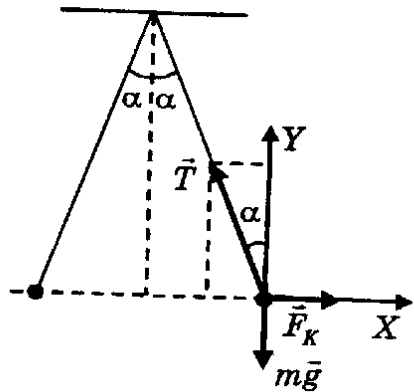


Рис. 8.16

ления, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} F_K - T \sin \alpha = 0, \\ T \cos \alpha - mg = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T \sin \alpha = F_K, \\ T \cos \alpha = mg, \end{cases} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{F_K}{mg} \quad (1).$$

Решение.

Так как шарики имеют одинаковую массу, то они отклоняются симметрично относительно вертикали на угол α . К каждому шару приложены силы: тяжести $m\vec{g}$, натяжения нити \vec{T} и \vec{F}_K — кулоновская сила отталкивания (рис. 8.16). Записав условия равновесия шарика на горизонтальное X и вертикальное Y направ-

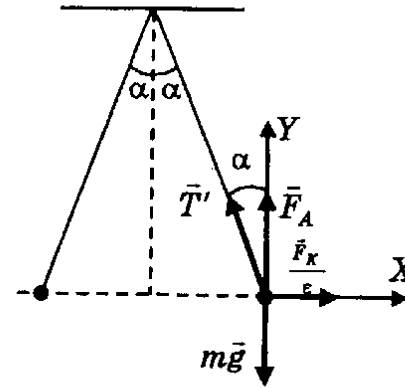


Рис. 8.17

оси, получим:

$$\begin{cases} \frac{F_K}{\epsilon} - T' \sin \alpha = 0, \\ F_A + T' \cos \alpha - mg = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T' \sin \alpha = \frac{F_K}{\epsilon}, \\ T' \cos \alpha = mg - F_A, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{F_K}{\epsilon(mg - F_A)} \quad (2).$$

Приравняв правые части (1) и (2), получим:

$$\frac{F_K}{mg} = \frac{F_K}{\epsilon(mg - F_A)} \Leftrightarrow mg = \epsilon(mg - F_A). \text{ Обозначив че-}$$

рез ρ_x плотность шарика, найдем $m = \rho_x V$, где V — объем шарика, $F_A = \rho V g$, где ρ — плотность керосина. Поэтому

$$\rho_x V g = \epsilon(\rho_x V g - \rho V g) \Rightarrow \rho_x = \frac{\epsilon \rho}{\epsilon - 1} \Rightarrow \rho_x = 1600 \text{ кг/м}^3.$$

Задача 8.3. Тонкое проволочное кольцо радиусом R несет электрический заряд q . В центре кольца расположен одноименный с q заряд Q , причем $Q \gg q$. Определить силу, растягивающую кольцо (рис. 8.18).

По условию задачи при погружении в керосин угол расхождения не изменился, поэтому не изменилось и расстояние между шариками, а это значит, что кулоновская сила уменьшилась в ϵ раз. Натяжение нити уменьшится и станет равным T' , так как в керосине на шарик начинает действовать выталкивающая сила \vec{F}_A (рис. 8.17). Записав условия равновесия на те же

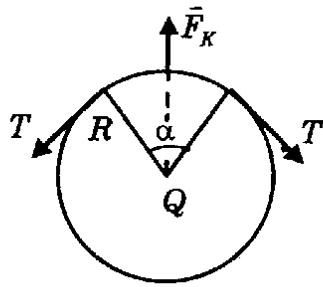


Рис. 8.18

соответствующей малому углу α , тогда $\Delta q = \frac{q}{2\pi} \alpha$. На элемент кольца действуют: со стороны заряда Q кулоновская сила отталкивания \vec{F}_K :

$$F_K = k \frac{|\Delta q||Q|}{R^2} = k \frac{|q||Q|}{2\pi R^2} \alpha$$

и силы T , растягивающие кольцо (рис. 8.18). Записав условие равновесия на ось X (рис. 8.19), получим

$$F_K - 2T \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = 0 \Rightarrow F_K - 2T \sin \frac{\alpha}{2} = 0.$$

Так как угол α мал, то $\sin \alpha/2 = \alpha/2$ и последнее уравнение запишется в виде:

$$k \frac{|q||Q|}{2\pi R^2} \alpha - 2T \frac{\alpha}{2} = 0 \Rightarrow T = k \frac{|q||Q|}{2\pi R^2}.$$

Задача 8.4. Вокруг неподвижного точечного заряда $q_0 = +10^9$ Кл равномерно вращается под действием кулоновской силы маленький шарик, заряженный отрицательно. Чему равно отношение его заряда к массе (удельный заряд), если радиус орбиты $R = 2$ см, а угловая скорость вращения $\omega = 3$ с⁻¹ (рис. 8.20)?

Решение.

Так как $q \ll Q$, то взаимодействием между отдельными элементами кольца можно пренебречь и рассматривать взаимодействие только между элементами кольца и зарядом Q . Выделим на кольце точечный заряд Δq , расположенный на

дуге

кольца,

соответствующей малому углу α , тогда $\Delta q = \frac{q}{2\pi} \alpha$. На элемент кольца действуют: со стороны заряда Q кулоновская сила отталкивания \vec{F}_K :

$$F_K = k \frac{|\Delta q||Q|}{R^2} = k \frac{|q||Q|}{2\pi R^2} \alpha$$

и силы T , растягивающие кольцо (рис. 8.18). Записав условие равновесия на ось X (рис. 8.19), получим

$$F_K - 2T \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = 0 \Rightarrow F_K - 2T \sin \frac{\alpha}{2} = 0.$$

Так как угол α мал, то $\sin \alpha/2 = \alpha/2$ и последнее уравнение запишется в виде:

$$k \frac{|q||Q|}{2\pi R^2} \alpha - 2T \frac{\alpha}{2} = 0 \Rightarrow T = k \frac{|q||Q|}{2\pi R^2}.$$

Таким образом, для равновесия кольца необходимо, чтобы натяжение было равно $T = k \frac{|q||Q|}{2\pi R^2}$.

В задаче 8.4 рассматривается взаимодействие между элементами кольца и зарядом Q . Выделим на кольце точечный заряд Δq , расположенный на дуге кольца, соответствующей малому углу α , тогда $\Delta q = \frac{q}{2\pi} \alpha$. На элемент кольца действуют: со стороны заряда Q кулоновская сила отталкивания \vec{F}_K :

$$F_K = k \frac{|\Delta q||Q|}{R^2} = k \frac{|q||Q|}{2\pi R^2} \alpha$$

и силы T , растягивающие кольцо (рис. 8.18). Записав условие равновесия на ось X (рис. 8.19), получим

$$F_K - 2T \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = 0 \Rightarrow F_K - 2T \sin \frac{\alpha}{2} = 0.$$

Так как угол α мал, то $\sin \alpha/2 = \alpha/2$ и последнее уравнение запишется в виде:

$$k \frac{|q||Q|}{2\pi R^2} \alpha - 2T \frac{\alpha}{2} = 0 \Rightarrow T = k \frac{|q||Q|}{2\pi R^2}.$$

Таким образом, для равновесия кольца необходимо, чтобы натяжение было равно $T = k \frac{|q||Q|}{2\pi R^2}$.

В задаче 8.4 рассматривается взаимодействие между элементами кольца и зарядом Q . Выделим на кольце точечный заряд Δq , расположенный на дуге кольца, соответствующей малому углу α , тогда $\Delta q = \frac{q}{2\pi} \alpha$. На элемент кольца действуют: со стороны заряда Q кулоновская сила отталкивания \vec{F}_K :

$$F_K = k \frac{|\Delta q||Q|}{R^2} = k \frac{|q||Q|}{2\pi R^2} \alpha$$

и силы T , растягивающие кольцо (рис. 8.18). Записав условие равновесия на ось X (рис. 8.19), получим

$$F_K - 2T \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = 0 \Rightarrow F_K - 2T \sin \frac{\alpha}{2} = 0.$$

Так как угол α мал, то $\sin \alpha/2 = \alpha/2$ и последнее уравнение запишется в виде:

$$k \frac{|q||Q|}{2\pi R^2} \alpha - 2T \frac{\alpha}{2} = 0 \Rightarrow T = k \frac{|q||Q|}{2\pi R^2}.$$

Таким образом, для равновесия кольца необходимо, чтобы натяжение было равно $T = k \frac{|q||Q|}{2\pi R^2}$.

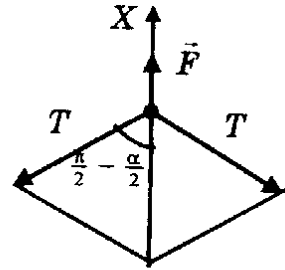


Рис. 8.19

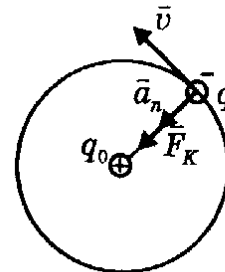


Рис. 8.20

$$F_K = m a_n \Rightarrow k \frac{|q_0||q|}{R^2} = m \omega^2 R \Rightarrow \frac{|q|}{m} = \frac{\omega^2 R^3}{k|q_0|} = 8 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/кг}.$$

Задача 8.5. На вертикальной пластине больших размеров равномерно распределен электрический заряд с поверхностной плотностью $\sigma = 3 \cdot 10^{-6}$ Кл/м². На прикрепленной к пластине нити подвешен маленький шарик массой $m = 2$ г, несущий заряд того же знака, что и пластина. Найти его заряд, если нить образует с вертикалью угол $\alpha = 45^\circ$ (рис. 8.21).

Решение.

Пластина создает однородное поле, напряженность которого $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$. Поле действует на заряд q с силой

$$F_K = Eq = \frac{q\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Кроме того, на заряд действуют: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити \vec{T} . Вводим оси X и Y и записываем условия равновесия:

$$\begin{cases} F_K - T \sin \alpha = 0, \\ T \cos \alpha - mg = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T \sin \alpha = F_K, \\ T \cos \alpha = mg, \end{cases} \Rightarrow \text{tg} \alpha = \frac{F_K}{mg} \Rightarrow$$

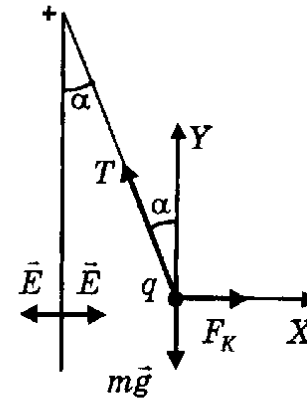


Рис. 8.21

$$\Rightarrow mgtg\alpha = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0} \Rightarrow q = \frac{2\varepsilon_0 mgtg\alpha}{\sigma} = 1,2 \cdot 10^{-7} \text{ Кл.}$$

Задача 8.6. По кольцу радиусом R равномерно распределен заряд Q . Определить напряженность и потенциал в центре кольца, а также в точке, отстоящей на расстоянии h от центра кольца по перпендикуляру к его плоскости.

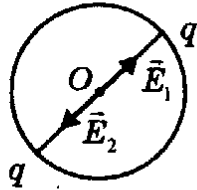


Рис. 8.22

Решение.
Будем считать, что $Q > 0$. Заряд, распределенный по кольцу, нельзя назвать точечным на небольших расстояниях от кольца. Разобьем заряд Q на точечные заряды $q = \frac{Q}{N}$, где N – число этих зарядов. Каждый точечный заряд создает в центре кольца напряженность, модуль которой $E = k \frac{q}{R^2}$.

1. Два точечных заряда, расположенных на концах одного диаметра, создают в центре кольца напряженность $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 0$ (рис. 8.22). Применяв аналогичный прием ко всем точечным зарядам, находящимся на кольце, находим, что напряженность в центре кольца $\vec{E}_O = 0$.

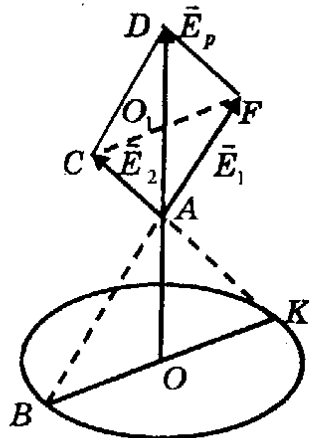


Рис. 8.23

Каждый заряд q в центре кольца создает потенциал $\varphi = k \frac{q}{R}$, по принципу суперпозиции $\varphi_O = N\varphi = N \cdot k \frac{q}{R} = k \frac{Q}{R}$.

2. Пусть $AO = h$ (рис. 8.23). В точке A диаметрально противоположные точечные заряды создают

напряженности

$$E_1 = E_2 = k \frac{q}{(AB)^2} = k \frac{q}{(R^2 + h^2)},$$

$$\vec{E}_P = \vec{E}_1 + \vec{E}_2.$$

Четырехугольник $ACDF$ – ромб, поэтому $\angle CAD = \angle DAF = \angle BAO = \angle KAO$, т.е. вектор \vec{E}_P направлен вдоль AO .

$$E_P = 2AO_1 = 2E_1 \cos \angle CAD.$$

$$\text{Из } \triangle BAO: \cos \angle BAO = \cos \angle CAD = \frac{AO}{AB} = \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}}.$$

Поэтому $E_P = 2E_1 \cdot \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}}$. Следующая пара точечных зарядов дает такой же вектор \vec{E}_P , и так далее. В точке A получим $\frac{N}{2}$ векторов \vec{E}_P .

$$\begin{aligned} \text{Следовательно, } E_A &= \frac{N}{2} \cdot E_P = \frac{N}{2} \cdot 2E_1 \cdot \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}} = \\ &= N \cdot k \frac{q}{R^2 + h^2} \cdot \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}} = k \frac{Qh}{(R^2 + h^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Каждый заряд q создает в точке A потенциал

$$\varphi = k \frac{q}{\sqrt{R^2 + h^2}}.$$

$$\text{Потенциал точки } A: \varphi_A = N\varphi = k \frac{Q}{\sqrt{R^2 + h^2}}.$$

Задача 8.7. На расстоянии d от большой проводящей пластины находится точечный положительный заряд q . С какой силой действует на него пластина?

Решение.

По закону электростатической индукции на поверхности пластины возникают отрицательные заряды. Из закона сохранения заряда следует, что на пластине возникают и положительные заряды, которые распределены на удаленных краях пластины. Так как пластина имеет большие размеры, то полем положительных индуцированных зарядов можно пренебречь. В соответствии с принципом суперпозиции поле во всех точках пространства представляет собой векторную сумму полей, созданных зарядом q , -

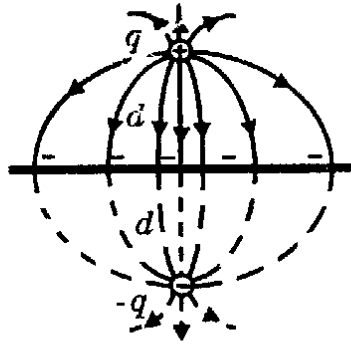


Рис. 8.24

и отрицательным индуцированным зарядом на плоскости $- \vec{E}_i$. Отметим, что индуцированный заряд не является точечным и по плоскости распределен неравномерно. Из свойств проводников в электростатическом поле следует, что результирующее поле в пластине равно нулю и под пластиной отсутствует (рис. 8.24).

Так как под пластиной $\vec{E}_p = \vec{E}_q + \vec{E}_i = 0 \Rightarrow \vec{E}_i = -\vec{E}_q$, т.е. поле отрицательных индуцированных зарядов совпадает с полем точечного отрицательного заряда $(-q)$, помещенного на расстоянии d под пластиной. Итак, заряд q находится в поле \vec{E}_p , которое над пластиной представляет собой поле двух точечных зарядов, одинаковых по модулю и противоположных по знаку. Следовательно, искомая сила равна силе взаимодействия между точечными зарядами q и $(-q)$, расположенными на расстоянии $2d$.

$$F_K = k \frac{q^2}{4d^2}$$

Задача 8.8. Две плоские одинаковые пластины площадью S каждая находятся на расстоянии d , малом по сравнению с их размерами. На одной из пластин находится заряд $+q$, на другой $+3q$. Определить: 1) силу взаимодействия между пластинами;

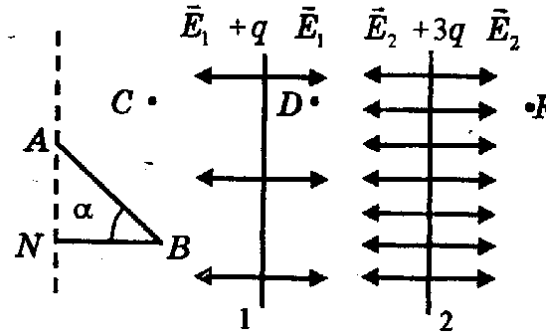


Рис. 8.25

2) напряженность электрического поля, создаваемого этой системой; 3) разность потенциалов между пластинами; 4) работу по перемещению заряда Q из точки A в точку B , если

$AB = l$ и задан угол α между AB и нормалью к пластинам (рис. 8.25).

Решение.

1. Пластина 1 создает по обе стороны однородное поле, модуль напряженности которого $E_1 = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} = \frac{q}{2\epsilon_0 S}$. Пластина 2

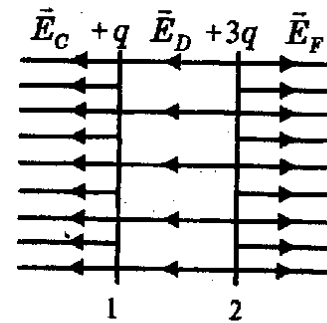


Рис. 8.26

создает поле с напряженностью $E_2 = \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} = \frac{3q}{2\epsilon_0 S}$. Распределенный на пластине 2 заряд $3q$ находится в однородном поле с напряженностью \vec{E}_1 . Разобьем заряд $3q$ на точечные заряды Δq_i . Сила, действующая на заряд Δq_i : $F_i = \Delta q_i E_1$. На заряд $3q$ действует сила

$$F_K = \sum \Delta q_i E_1 = E_1 \sum \Delta q_i = E_1 \cdot 3q = \frac{q}{2\epsilon_0 S} \cdot 3q = \frac{3q^2}{2\epsilon_0 S}$$

По третьему закону Ньютона такая же по модулю сила действует на пластину 1. Итак, между пластинами действует сила отталкивания

$$F_K = \frac{3q^2}{2\epsilon_0 S}$$

2. В соответствии с принципом суперпозиции напряженность поля в любой точке $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$. В точке C (слева от пластины 1) получаем, что

$$E_C = E_1 + E_2 = \frac{q}{2\epsilon_0 S} + \frac{3q}{2\epsilon_0 S} = \frac{2q}{\epsilon_0 S}$$

В точке D (между пластинами):

$$E_D = E_2 - E_1 = \frac{3q}{2\epsilon_0 S} - \frac{q}{2\epsilon_0 S} = \frac{q}{\epsilon_0 S}$$

В точке F (справа от пластины 2):

$$E_F = E_1 + E_2 = \frac{2q}{\epsilon_0 S}$$

Результирующее поле представлено на рис. 8.26.

3. Так как поле между пластинами однородно, то разность потенциалов между пластинами $u = E_D d = \frac{qd}{\epsilon_0 S}$

4. Работа электростатических сил при перемещении заряда Q из точки A в точку B равна $A = Q(\varphi_A - \varphi_B)$. Точки A и N расположены на одной эквипотенциальной поверхности, т.е. $\varphi_A = \varphi_N$ (рис. 8.25). Вместе с тем, $\varphi_N < \varphi_B$, так как потенциал электростатического поля убывает в направлении силовых линий. $\varphi_B - \varphi_N = E_C(x_N - x_B) = E_C l \cos \alpha$.

$$\varphi_A - \varphi_B = \varphi_N - \varphi_B = -(\varphi_B - \varphi_N) = -E_C l \cos \alpha$$

$$A = -QE_C l \cos \alpha = -\frac{2qQ}{\epsilon_0 S} l \cos \alpha. \text{ Если } q \text{ и } Q \text{ одного знака, то}$$

$A < 0$, т.е. при перемещении заряда из A в B необходимо совершать работу против сил электростатического поля.

Задача 8.9. Два протона и два позитрона, первоначально покоящиеся в вершинах квадрата, разлетаются. Отношение их масс $\frac{M}{m} = 2000$, а заряды одинаковые. Найти отношение скоростей протонов и позитронов после их разлета (на бесконечности) (рис. 8.27).

Решение.

Позитрон — элементарная частица, масса которой равна массе электрона, ее заряд положителен и равен

$$|e| = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл.}$$

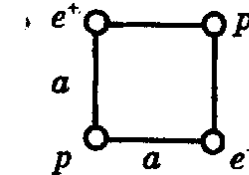


Рис. 8.27

Из симметрии задачи следует, что на протоны и позитроны в тот момент, когда они расположены в вершинах квадрата, действуют одинаковые силы. Так как масса протонов много больше массы позитронов, то сначала разлетятся позитроны, а затем — протоны. Вычислим потенциальную энергию, которой обладают позитроны, находясь в вершинах квадрата. Энергия взаимодействия позитронов между собой $k \frac{e^2}{a\sqrt{2}}$, где a — сторона квадрата. Энергия взаимодействия между протонами и позитронами равна

$$2 \left(k \frac{e^2}{a} + k \frac{e^2}{a} \right) = 4k \frac{e^2}{a}. \text{ Таким образом, потенциальная энергия позитронов } W_{p1} = k \frac{e^2}{a\sqrt{2}} + 4k \frac{e^2}{a} = k \frac{e^2}{a} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 4 \right).$$

Когда позитроны окажутся на бесконечности, они будут обладать только кинетической энергией $W_m = 2 \frac{mv_1^2}{2} = mv_1^2$, где v_1 — скорость позитронов на бесконечности. По закону сохранения энергии $W_{p1} = W_m \Rightarrow k \frac{e^2}{a} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 4 \right) = mv_1^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow v_1 = \sqrt{k \frac{e^2}{ma} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 4 \right)}$$

После того, как позитроны разлетятся, потенциальная энергия протонов $W_{P_2} = k \frac{e^2}{a\sqrt{2}}$. После разлета на бесконечности они будут обладать только кинетической энергией $W_{K_2} = 2 \frac{Mv_2^2}{2} = Mv_2^2$, где v_2 — скорость протонов.

По закону сохранения энергии

$$W_{P_2} = W_{K_2} \Rightarrow k \frac{e^2}{a\sqrt{2}} = Mv_2^2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{k \frac{e^2}{Ma\sqrt{2}}}$$

Искомое отношение:

$$\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{m}{M} \frac{1}{(4 + 1/\sqrt{2})\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{m}{M} \frac{1}{4\sqrt{2} + 1}} = 0,01.$$

Задача 8.10. В плоский конденсатор длиной $L = 5$ см влетает электрон под углом $\alpha = 15^\circ$ к пластинам. Электрон обладает энергией $W = 2,4 \cdot 10^{-16}$ Дж. Расстояние между пластинами $d = 1$ см. Определить величину напряжения на пластинах конденсатора U , при котором электрон при выходе из пластин будет двигаться параллельно им (рис. 8.28).

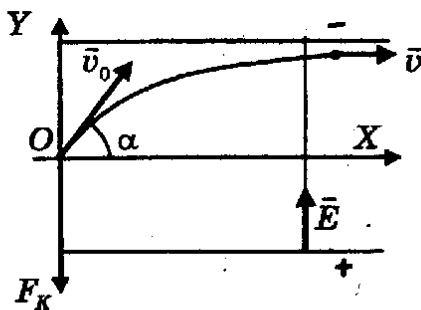


Рис. 8.28

Решение.

Пусть v_0 — начальная скорость электрона. Его энергия $W = \frac{mv_0^2}{2}$, где

m — масса электрона. На электрон действует со стороны поля сила $F_K = |e|E$, где E — напряженность поля.

В подобных задачах действием сил тяжести на элементарные частицы можно пренеб-

речь. Разложим сложное движение электрона на два простых: вдоль оси X , параллельной пластинам, и вдоль оси Y , перпендикулярной пластинам. Начало системы координат O поместим в точку влета электрона в конденсатор. Начальные координаты электрона $x_0 = 0, y_0 = 0$; его начальные скорости $v_{0x} = v_0 \cos \alpha, v_{0y} = v_0 \sin \alpha$. Ускорение $a_x = 0$, следовательно, в направлении X движение является прямолинейным равномерным.

Ускорение $a_y = -\frac{F_K}{m} = -\frac{|e|E}{m} = \text{const}$. Следовательно, движение по оси Y является равнопеременным.

Законы движения по оси X :

$$v_x(t) = v_0 \cos \alpha, \quad x(t) = x_0 + v_{0x}(t) = v_0 \cos \alpha t.$$

Законы движения по оси Y :

$$v_y(t) = v_{0y} + a_y t = v_0 \sin \alpha - \frac{|e|E}{m} t,$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y} t + \frac{a_y t^2}{2} = v_0 \sin \alpha t - \frac{|e|Et^2}{2m}.$$

Исключив из второго уравнения время $t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$ и под-

ставив его в четвертое, получим

$$y = v_0 \sin \alpha \frac{x}{v_0 \cos \alpha} - \frac{|e|E}{2m} \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} \Rightarrow x \tan \alpha - \frac{|e|E}{2mv_0^2 \cos^2 \alpha} x^2.$$

Это уравнение параболы. Мы доказали, что заряженная частица, влетевшая под углом к силовым линиям однородного поля, будет двигаться в этом поле по параболе.

В точке вылета $v_y = 0, x = L$, поэтому

$$\begin{cases} v_0 \sin \alpha - \frac{|e|E}{m} t = 0, \\ v_0 \cos \alpha t = L. \end{cases}$$

Выразим из последнего уравнения время пролета электрона через конденсатор: $t = \frac{L}{v_0 \cos \alpha}$. Из первого уравнения найдем

напряженность поля в конденсаторе:

$$E = \frac{mv_0 \sin \alpha}{|e|t} = \frac{mv_0 \sin \alpha}{|e| \frac{L}{v_0 \cos \alpha}} = \frac{mv_0^2}{2|e|L} \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha =$$

$$= \frac{mv_0^2}{2} \cdot \frac{1}{|e|L} \sin 2\alpha = \frac{W}{|e|L} \sin 2\alpha.$$

Напряжение на пластинах $u = Ed$, т. е.

$$u = \frac{d}{L} \cdot \frac{W}{|e|} \sin 2\alpha = 150 \text{ В.}$$

Задача 8.11. Два конденсатора, емкости которых C_1 и C_2 , соединены последовательно и подключены к источнику с напряжением u . Определить напряжение на конденсаторах.

Решение.

Пусть u_1 и u_2 — напряжения на конденсаторах, тогда заряды на них равны $C_1 u_1$ и $C_2 u_2$. Используя свойства последовательного соединения конденсаторов, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1 u_1 = C_2 u_2; \\ u_1 + u_2 = u, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_2 = \frac{C_1}{C_2} u_1, \\ u_1 + \frac{C_1}{C_2} u_1 = u, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{C_2 u}{C_1 + C_2}, \\ u_2 = \frac{C_1 u}{C_1 + C_2}. \end{cases}$$

Задача 8.12. Определить разность потенциалов между точками A и B в схеме, изображенной на рис. 8.29.

Решение.

Проставим дополнительно точки M и N на схеме. Конденсаторы C_1 и C_2 соединены последовательно, напряжение на

них равно разности потенциалов между точками M и N : $\varphi_M - \varphi_N = u$. В нашей задаче

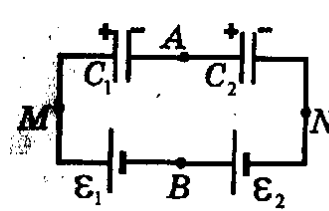


Рис. 8.29

найдем, что $\varphi_M - \varphi_N = E_1 + E_2 = u$. Напряжение на конденсаторе C_1 равно $\varphi_M - \varphi_A = u_1$. Напряжение на конденсаторе C_2 равно $\varphi_A - \varphi_N = u_2$. Тогда по свойствам последовательного соединения конденсаторов можно составить систему уравнений:

$$\begin{cases} u_1 + u_2 = u = E_1 + E_2, \\ C_1 u_1 = C_2 u_2. \end{cases}$$

Воспользовавшись результатами задачи 8.11., найдем

$$u_1 = \frac{(E_1 + E_2) C_2}{C_1 + C_2} \text{ и } u_2 = \frac{(E_1 + E_2) C_1}{C_1 + C_2}.$$

Итак,

$$\begin{cases} \varphi_M - \varphi_B = E_1 \\ \varphi_M - \varphi_A = u_1 \end{cases} \Rightarrow \varphi_A - \varphi_B = E_1 - u_1 = \frac{E_1 C_1 - E_2 C_2}{C_1 + C_2}.$$

Задача 8.13. Конденсатор емкостью C_1 при помощи переключателя K присоединяют сначала к батарее с ЭДС \mathcal{E} , а потом к незаряженному конденсатору емкостью C_2 (рис. 8.30). Найти заряд, который появится на конденсаторе C_2 .

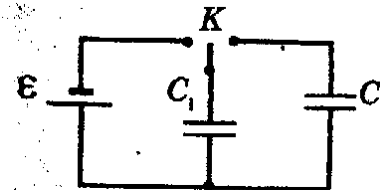


Рис. 8.30

Решение.

Пусть ключ K находится в левом положении, тогда конденсатор C_1 подсоединен к источнику ЭДС; конденсатор C_2 от источника отключен. Конденсатор C_1 заряжается до

напряжения \mathcal{E} , его заряд $q_0 = C_1 \mathcal{E}$.

Перебросив ключ в правое положение, мы отсоединяем источник от конденсаторов, образуется замкнутая цепь из двух конденсаторов C_1 и C_2 . Конденсатор C_1 будет разряжаться, конденсатор C_2 – заряжаться. Процесс перераспределения зарядов происходит до тех пор, пока потенциалы верхних и нижних пластин конденсаторов не станут равными. Значит, и разности потенциалов (напряжения) на конденсаторах равны: $u_1 = u_2 = u$. На конденсаторе C_1 останется заряд $C_1 u$, а на конденсаторе C_2 появится заряд $C_2 u$. После отключения источника конденсаторы образуют замкнутую систему. По закону сохранения заряда

$$q_0 = C_1 u + C_2 u \Rightarrow C_1 \mathcal{E} = (C_1 + C_2) u \Rightarrow u = \frac{C_1 \mathcal{E}}{C_1 + C_2}.$$

На конденсаторе C_2 появится заряд

$$q_2 = C_2 u = \frac{C_1 C_2 \mathcal{E}}{C_1 + C_2}.$$

Задача 8.14. Конденсатор емкостью $C_1 = 4$ мкФ заряжен до разности потенциалов $u_1 = 10$ В. Какой заряд будет на пластинах этого конденсатора, если к нему подключить другой конденсатор емкостью $C_2 = 6$ мкФ, заряженный до разности потенциалов $u_2 = 20$ В? Соединены пластины, имеющие заряды разных знаков (рис. 8.31).

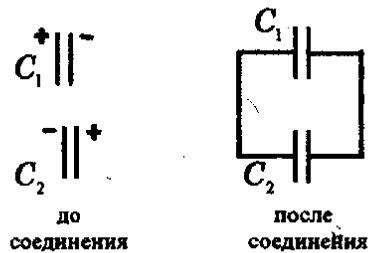


Рис. 8.31

Решение.

До соединения заряд первого конденсатора $q_1 = C_1 u_1$, а заряд второго $q_2 = C_2 u_2$.

После соединения пластин проводниками начинается перераспределение зарядов пластин. Как отмечалось в задаче 8.12, этот процесс про-

должается до выравнивания потенциалов правых и, соответственно, левых пластин. Значит, после перераспределения зарядов разности потенциалов на конденсаторах равны u . Заряд первого конденсатора станет равным $C_1 u$, а второго – $C_2 u$.

Правые пластины конденсаторов (как и левые) образуют замкнутую систему, поэтому алгебраическая сумма их зарядов постоянна. До соединения сумма зарядов правых пластин равна $C_2 u_2 - C_1 u_1 > 0$, после соединения: $C_1 u + C_2 u = (C_1 + C_2) u$. Получаем уравнение:

$$C_2 u_2 - C_1 u_1 = (C_1 + C_2) u \Rightarrow u = \frac{C_2 u_2 - C_1 u_1}{C_1 + C_2}.$$

Заряд первого конденсатора

$$q_1' = C_1 u = \frac{C_1 (C_2 u_2 - C_1 u_1)}{C_1 + C_2} = 3,2 \cdot 10^{-5} \text{ Кл.}$$

Правые пластины зарядятся положительно, а левые – отрицательно.

Задача 8.15. Плоский конденсатор заполнен диэлектриком, проницаемость которого зависит от напряжения на конденсаторе

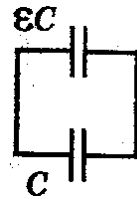


Рис. 8.32

по закону $\epsilon = \alpha u$, где $\alpha = 1 \text{ В}^{-1}$. Параллельно этому конденсатору, который вначале не заряжен, подключают такой же конденсатор, но без диэлектрика, который заряжен до напряжения $u_0 = 156$ В. Определить напряжение, которое установится на конденсаторах (рис. 8.32).

Решение.

C – емкость конденсатора без диэлектрика, $C u_0$ – начальный заряд на нем, ϵC – емкость конденсатора с диэлектриком. После соединения конденсаторов на них устанавливается одинаковое напряжение u , заряды конденсаторов станут равными $C u$ и $\epsilon C u = \alpha u^2 C$. По закону сохранения заряда получаем уравнение:

$$C u_0 = C u + \alpha u^2 C \Rightarrow \alpha u^2 + u - u_0 = 0.$$

Решая это квадратное уравнение и учитывая, что $u > 0$, находим: $u = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\alpha u_0}}{2\alpha} = 12 \text{ В}$.

Задача 8.16. Между пластинами плоского воздушного конденсатора (расстояние между пластинами d , площадь каждой пластины S) вводится параллельно пластинам металлическая пластинка, толщина которой $d_1 < d$. Определить емкость получившегося конденсатора.

Решение.

Предположим, что на пластины конденсатора, в который введена пластинка, подано напряжение. Так как электростатиче-

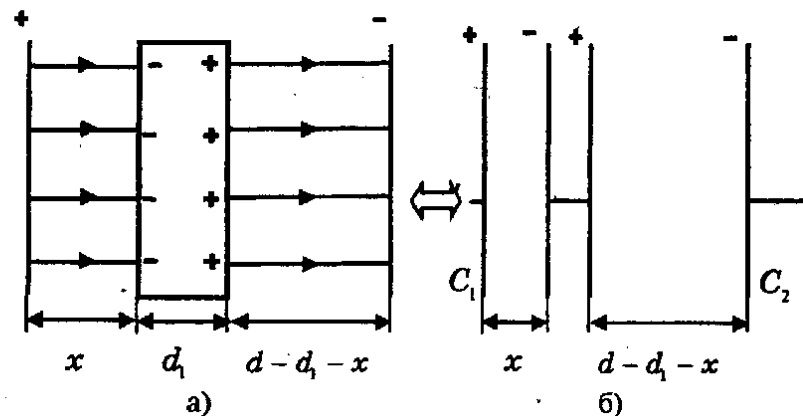


Рис. 8.33

ское поле не проникает внутрь металлического проводника, то поле внутри конденсатора существует только в пространстве, не занятом пластинкой (рис. 8.33а).

На поверхности пластинки наводятся заряды разных знаков, но вся пластинка при этом является поверхностью равного потенциала (эквипотенциальной поверхностью). Поэтому конденсатор с введенной металлической пластинкой эквивалентен двум последовательно соединенным конденсаторам (рис. 8.33б). Емкость $C_1 = \frac{\epsilon_0 S}{x}$, а емкость $C_2 = \frac{\epsilon_0 S}{d - d_1 - x}$. Искомая емкость

C вычисляется по формуле для последовательного соединения:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{x}{\epsilon_0 S} + \frac{d - d_1 - x}{\epsilon_0 S} = \frac{d - d_1}{\epsilon_0 S} \Rightarrow C = \frac{\epsilon_0 S}{d - d_1}$$

Как видно, емкость C не зависит от x , т. е. от того, в каком месте введена пластинка. Если толщина пластинки мала ($d_1 \rightarrow 0$), то емкость конденсатора не изменяется.

Задача 8.17. В плоский воздушный конденсатор с расстоянием d между пластинами вводится параллельно им диэлектрическая пластинка, толщина которой $d_1 < d$. Определить емкость конденсатора, если диэлектрическая проницаемость материала пластинки — ϵ , площадь пластин и пластинки — S .

Решение.

Предположим, что на обкладки конденсатора с диэлектриком подано напряжение. Электрическое поле проникает в диэлектрик, что приводит к возникновению связанных зарядов на его поверхности. Если поверхность пластинки покрыть очень тонким проводящим слоем, то, как показано в задаче 8.16, на его поверхностях появятся заряды противоположных знаков. Электрическое поле в конденсаторе не изменится, как не изменится и

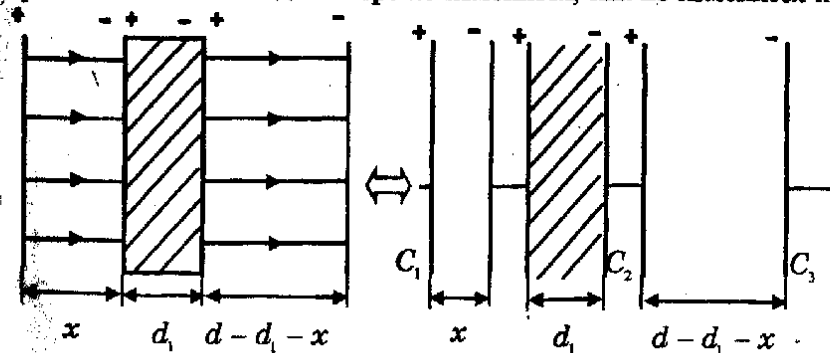


Рис. 8.34

его емкость. В этом случае образуются три последовательно соединенных конденсатора, емкости которых: $C_1 = \frac{\epsilon_0 S}{x}$,

$C_2 = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{d_1}$, $C_3 = \frac{\epsilon_0 S}{d - d_1 - x}$ (рис. 8.34). Общую емкость C на-

ходим по формуле:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{x}{\epsilon_0 S} + \frac{d_1}{\epsilon \epsilon_0 S} + \frac{d - d_1 - x}{\epsilon_0 S} =$$

$$= \frac{d - d_1}{\epsilon_0 S} + \frac{d_1}{\epsilon \epsilon_0 S} = \frac{\epsilon d + (1 - \epsilon) d_1}{\epsilon \epsilon_0 S} \Rightarrow C = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{\epsilon d + (1 - \epsilon) d_1}$$

Емкость конденсатора с диэлектрической пластинкой не зависит от x , т. е. от того, где введена пластинка.

Задача 8.18. Между пластинами плоского воздушного конденсатора параллельно им расположена пластинка из диэлектрика с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 2$. Ее толщина вдвое меньше расстояния между пластинами конденсатора. Конденсатор подключен к источнику постоянного напряжения u . Пластинку извлекают из конденсатора. Какую работу при этом совершают силы электростатического поля конденсатора? Рассмотреть два случая:

- а) пластинку извлекают после отключения источника;
- б) пластинку извлекают при подключенном источнике.

Емкость конденсатора без пластины равна C_0 .

Решение.

S — площадь пластин, d — расстояние между ними, тогда $C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{d}$. Когда диэлектрическая пластинка находится в

конденсаторе, его емкость $C = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{\epsilon d + (1 - \epsilon) d_1}$ (см. задачу 8.17).

При $\epsilon = 2$ и $d_1 = \frac{d}{2}$ $C = \frac{4 \epsilon_0 S}{3d} = \frac{4}{3} C_0$. Заряд конденсатора

$Q = Cu = \frac{4}{3} C_0 u$, а его энергия $W_1 = \frac{Cu^2}{2} = \frac{2}{3} C_0 u^2$. Если ис-

точник отключен, то при извлечении пластинки заряд конденсатора останется постоянным, а его емкость уменьшится до C_0 . Это приведет к увеличению энергии конденсатора, которая

станет равной $W_2 = \frac{Q^2}{2C_0} = \frac{8}{9} C_0 u^2$. Изменение энергии

$\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{2}{9} C_0 u^2 > 0$. Так как источник отключен, то работа консервативных сил электростатического поля $A = -\Delta W = -\frac{2}{9} C_0 u^2$. Внешние силы при этом будут производить равную по модулю положительную работу.

Если источник остается подключенным, то напряжение на конденсаторе постоянное, а его емкость уменьшается до C_0 . Это приводит к уменьшению энергии конденсатора до

$W_2' = \frac{C_0 u^2}{2}$. Изменение энергии в этом случае

$\Delta W = W_2' - W_1 = -\frac{1}{6} C_0 u^2 < 0$. Так как емкость

конденсатора уменьшится, а напряжение на нем постоянно, то заряд конденсатора уменьшится до $Q' = C_0 u$. Изменение заряда

$\Delta Q = Q' - Q = C_0 u - \frac{4}{3} C_0 u = -\frac{1}{3} C_0 u$. Следовательно,

источник совершит работу $A_{\text{ист}} = \Delta Qu = -\frac{1}{3} C_0 u^2$.

По закону сохранения энергии эта работа идет на изменение энергии конденсатора и на работу сил поля A .

$A_{\text{ист}} = A + \Delta W \Rightarrow A = A_{\text{ист}} - \Delta W = -\frac{1}{3} C_0 u^2 - \left(-\frac{1}{6} C_0 u^2\right) =$

$= -\frac{1}{6} C_0 u^2$. Внешние силы, приложенные к диэлектрической

пластинке, произведут равную по модулю положительную работу.

Задача 8.19. Определить заряды конденсаторов в схеме, показанной на рис. 8.35.

Решение.

Проставим знаки зарядов пластин. Обозначим напряжения на конденсаторах u_1, u_2, u_3 . Заряды каждого конденсатора равны:

$q_1 = C_1 u_1, q_2 = C_2 u_2, q_3 = C_3 u_3$. Так как три пластины сходятся в

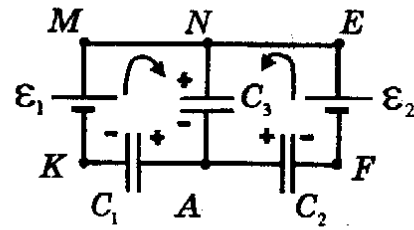


Рис. 8.35

одной точке A , непосредственно не подключенной к источникам, то их суммарный заряд равен нулю. Получаем уравнение:

$$C_1 u_1 + C_2 u_2 - C_3 u_3 = 0 \quad (1).$$

Обходя замкнутый контур $MNAKM$ по часовой стрелке, получаем уравнение

$$\mathcal{E}_1 = u_3 + u_1 \quad (2).$$

Обходя замкнутый контур $AFENA$ против часовой стрелки, получим уравнение $\mathcal{E}_2 = u_3 + u_2 \quad (3)$.

Уравнения (1), (2) и (3) образуют систему:

$$\begin{cases} C_1 u_1 + C_2 u_2 - C_3 u_3 = 0 & (1), \\ \mathcal{E}_1 = u_3 + u_1 & (2), \\ \mathcal{E}_2 = u_3 + u_2 & (3). \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \mathcal{E}_1 - u_3, \\ u_2 = \mathcal{E}_2 - u_3, \\ C_1(\mathcal{E}_1 - u_3) + C_2(\mathcal{E}_2 - u_3) - C_3 u_3 = 0. \end{cases}$$

Из третьего уравнения находим: $u_3 = \frac{C_1 \mathcal{E}_1 + C_2 \mathcal{E}_2}{C_1 + C_2 + C_3}$.

Тогда $u_1 = \mathcal{E}_1 - u_3 = \frac{C_2 \mathcal{E}_1 + C_3 \mathcal{E}_1 - C_2 \mathcal{E}_2}{C_1 + C_2 + C_3}$ и

$$u_2 = \mathcal{E}_2 - u_3 = \frac{C_1 \mathcal{E}_2 + C_3 \mathcal{E}_2 - C_1 \mathcal{E}_1}{C_1 + C_2 + C_3}.$$

Заряды конденсаторов найдем, умножив напряжения на соответствующие емкости.

9.1. Электрический ток

Электрическим током называют упорядоченное движение свободных электрических зарядов вдоль проводника. За направление тока принимают направленное движение положительно заряженных частиц. Если ток образован движением отрицательно заряженных частиц, то направление тока считают противоположным направлению движения этих частиц.

Электрический ток может производить тепловые, химические и магнитные действия.

Количественной характеристикой тока является сила тока

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \text{const} \quad (9.1)$$

где Δq – заряд, прошедший через поперечное сечение проводника за время Δt . Если сила тока с течением времени не меняется, то ток называют постоянным. Сила тока зависит от заряда q_0 частиц, образующих электрический ток, концентрации n этих частиц, скорости v их упорядоченного движения, площади S поперечного сечения проводника и выражается формулой:

$$I = |q_0| n v S \quad (9.2)$$

В общем случае ток не является постоянным, его мгновенное значение $i(t)$ есть производная от заряда $q(t)$ по времени:

$$i(t) = q'(t) \quad (9.3)$$

Пусть задана произвольная зависимость тока от времени $i(t)$ (рис. 9.1). Заряд, протекающий через поперечное сечение проводника за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$, численно равен площади криволинейной трапеции $ABCD$:

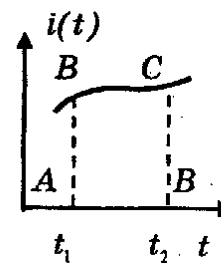


Рис. 9.1

$$q(t) = S_{ABCD} = \int_{t_1}^{t_2} i(t) dt. \quad (9.4)$$

Плотностью электрического тока называют отношение силы тока I к площади поперечного сечения проводника S :

$$j = \frac{I}{S} \quad (9.5)$$

Для возникновения и существования постоянного электрического тока в веществе должны выполняться два условия:

1. В веществе должны присутствовать свободные заряды.

2. Необходима сила, действующая на заряды в определенном направлении.

В металлах, например, свободными зарядами являются свободные электроны. Для создания силы, действующей на заряды, к концам проводника прикладывают постоянную разность потенциалов. В результате в проводнике возникает электрическое поле, которое действует на свободные заряды с силой $F = |q_0|E$, где E – напряженность поля. Эта сила заставляет свободные заряды смещаться вдоль проводника.

9.2. Сопротивление проводника. Закон Ома для однородного участка цепи. Последовательное и параллельное соединение проводников

Проводник характеризуется своим сопротивлением R электрическому току. Сопротивление проводника зависит от его размеров, а также вещества, из которого он изготовлен, и рассчитывается по формуле:

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad (9.6)$$

где l – длина проводника, S – площадь поперечного сечения, ρ – удельное сопротивление.

Электрическое сопротивление металлических проводников с ростом температуры возрастает и вычисляется по формуле:

$$R(t) = R_0(1 + \alpha t), \quad (9.7)$$

где R_0 – сопротивление проводника при 0°C , t – температура $^\circ\text{C}$, α – температурный коэффициент сопротивления.

Участок электрической цепи, не содержащий источников тока, называется однородным. Однородный участок цепи можно рассматривать как проводник сопротивлением R .

Закон Ома утверждает, что сила тока в проводнике пропорциональна напряжению (разности потенциалов) на проводнике и обратно пропорциональна его сопротивлению:

$$I = \frac{u}{R} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} \quad (9.8)$$

Проводники можно соединять в электрической цепи последовательно и параллельно.

При последовательном соединении (рис. 9.2):

1. Сила тока в проводниках одинакова:

$$I_1 = I_2 = \dots = I_n = I.$$

2. Напряжение равно сумме напряжений на проводниках:

$$u = u_1 + u_2 + \dots + u_n.$$

3. Сопротивление равно сумме сопротивлений проводников:

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n \quad (9.9)$$

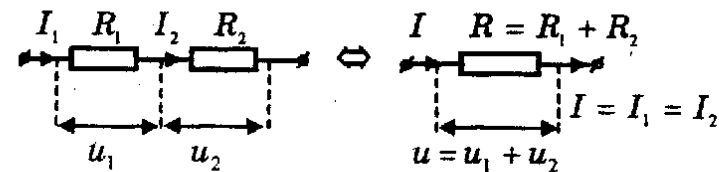


Рис. 9.2

При параллельном соединении (рис. 9.3):

1. Общий ток равен сумме токов, протекающих через проводники:

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n.$$

2. Напряжение на проводниках одинаково:

$$u_1 = u_2 = \dots = u_n.$$

3. Сопротивление участка электрической цепи, состоящего из параллельно соединенных проводников, рассчитывается по формуле

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \quad (9.10)$$

Из формулы (9.10) получаем два важных частных случая:

1. При $n = 2$
$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

2. При $R_1 = R_2 = \dots = R_n = R_0$
$$R = \frac{R_0}{n}$$

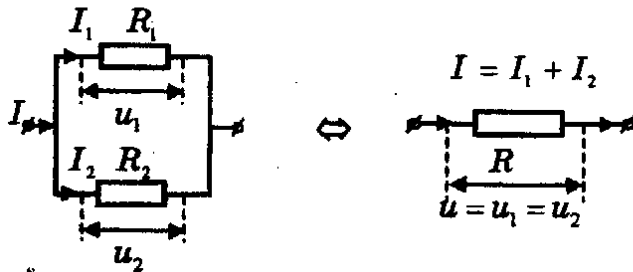


Рис. 9.3

9.3. Работа и мощность тока

При перемещении заряда Δq по проводнику силы электрического поля совершают работу $A = \Delta q(\varphi_1 - \varphi_2) = \Delta q u$. В этом случае говорят, что электрический ток совершает работу. Если ток I постоянный, то за время Δt по проводнику протекает заряд $\Delta q = I \Delta t$, работа электрического тока вычисляется по формуле:

$$A = I u \Delta t \quad (9.11)$$

По закону Ома $I = \frac{u}{R}$, поэтому

$$A = \frac{u^2}{R} \Delta t \quad (9.12)$$

Учитывая, что $u = IR$, получаем еще одну формулу для вычисления работы:

$$A = I^2 R \Delta t \quad (9.13)$$

В случае, когда проводник остается неподвижным, не совершается механическая работа и ток не производит химических действий, работа идет на увеличение внутренней энергии проводника. Проводник при этом нагревается. Итак, при протекании электрического тока в проводнике выделяется количество тепло-

$$Q = I u \Delta t = \frac{u^2}{R} \Delta t = I^2 R \Delta t \quad (9.14)$$

Последняя формула была установлена экспериментально и называется законом Джоуля-Ленца.

Мощностью электрического тока называется величина

$$P = \frac{A}{\Delta t} \quad (9.15)$$

где A – работа тока, Δt – время, за которое эта работа совершена.

Мощность тока можно рассчитывать по одной из формул:

$$P = I u = I^2 R = \frac{u^2}{R} \quad (9.16)$$

9.4. Закон Ома для замкнутой электрической цепи

Замкнутая электрическая цепь содержит внешний проводник сопротивлением R и источник тока, который характеризуется электродвижущей силой (ЭДС) \mathcal{E} и внутренним сопротивлением r (рис. 9.4).

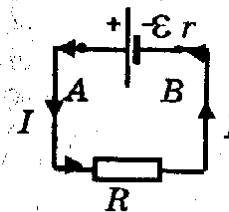


Рис. 9.4

При протекании электрического тока I на участке цепи от точки B к точке A (через источник) на заряды действуют силы неэлектрической природы. Эти силы называются сторонними. Под действием сторонних сил положительный заряд q перемещается от «-» к «+», двигаясь против силы со стороны электрического поля внутри источника. Работа сторонних сил

при перемещении заряда по замкнутому контуру не равна нулю.

Электродвижущая сила источника есть отношение работы сторонних сил, совершаемой по перемещению заряда по замкнутому контуру, к величине этого заряда:

$$\mathcal{E} = \frac{A_{\text{ст}}}{q} \quad (9.17)$$

Работа сторонних сил $A_{\text{ст}} = \mathcal{E}q$, где $q = I\Delta t$, поэтому $A_{\text{ст}} = \mathcal{E}I\Delta t$. За счет этой работы на внутреннем и внешнем сопротивлениях выделяется теплота, равная по закону Джоуля-Ленца $Q = I^2(R+r)\Delta t$.

Так как $Q = A_{\text{ст}}$, то

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R+r} \quad (9.18)$$

Формула (9.18) выражает закон Ома для замкнутой электрической цепи. Величина $(R+r)$ называется полным сопротивлением цепи.

Из формулы (9.18) получаем, что $\mathcal{E} = IR + Ir$. Произведение $IR = u$ — напряжение на проводнике сопротивлением R , т.е. напряжение во внешней цепи. Произведение Ir — напряжение на внутреннем сопротивлении источника. Итак,

$$\mathcal{E} = u + Ir,$$

откуда следует, что напряжение во внешней цепи не равно \mathcal{E} . $\mathcal{E} = u$ при $r=0$, т.е. когда внутренним сопротивлением источника можно пренебречь.

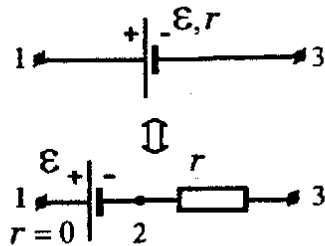


Рис. 9.5

источника.

При решении некоторых задач источник ЭДС можно заменить его эквивалентной схемой, состоящей из двух последовательно соединенных элементов: идеального источника с ЭДС данного реального источника, но внутренним сопротивлением, равным нулю, и проводника сопротивлением r , равным внутреннему сопротивлению источника.

На рис. 9.5 приведена схема, эквивалентная реальной ЭДС. Ток через источник может протекать от точки 1 к точке 3, а может и наоборот. Направление тока зависит от того, какие внешние элементы подключены к точкам 1 и 3. При использовании этой эквивалентной схемы надо помнить, что потенциал точки 1 всегда больше потенциала точки 2 на величину \mathcal{E} , т.е. $\varphi_1 - \varphi_2 = \mathcal{E}$. Кроме того, через проводник ток протекает от точек с большим потенциалом к точкам с меньшим потенциалом. Пусть, например, ток I протекает от точки 3 к точке 1 (источник работает в режиме разрядки), тогда

$$\begin{cases} \varphi_1 - \varphi_2 = \mathcal{E}, \\ \varphi_3 - \varphi_2 = Ir. \end{cases}$$

После вычитания получаем, что $\varphi_1 - \varphi_3 = \mathcal{E} - Ir$. Если ток протекает от точки 1 к точке 3 (источник работает в режиме зарядки), то

$$\begin{cases} \varphi_1 - \varphi_2 = \mathcal{E}, \\ \varphi_2 - \varphi_3 = Ir. \end{cases}$$

После сложения получим, что $\varphi_1 - \varphi_3 = \mathcal{E} + Ir$.

9.5. Правила Кирхгофа

Для решения некоторых задач на разветвленные цепи необходимо использовать правила Кирхгофа.

1. Алгебраическая сумма всех токов, приходящих в точку разветвления (узел) и выходящих из нее, равна нулю, т.е. $I_1 + I_2 + \dots + I_n = 0$. При этом токи, входящие в узел, считаются положительными, а выходящие из узла — отрицательными.

Для узла A (рис. 9.6)

$$I_1 - I_2 - I_3 + I_4 = 0.$$

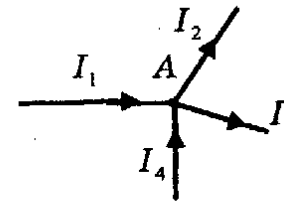


Рис. 9.6

2. При обходе любого замкнутого контура в сложной электрической цепи алгебраическая сумма напряжений на проводни-

ках (включая и внутренние сопротивления источников) равна алгебраической сумме ЭДС, имеющих в этом контуре:

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 + \dots + I_n R_n = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \dots + \mathcal{E}_n.$$

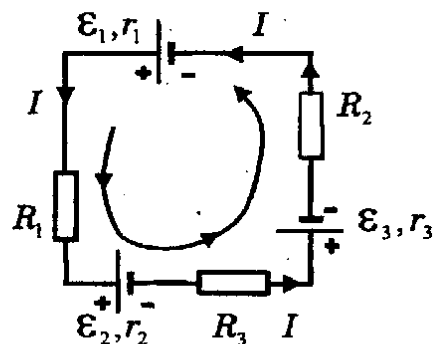


Рис. 9.7

Направление обхода контура и направления токов в нем выбирается произвольно. Напряжение на проводнике считается положительным, если направление обхода совпадает с направлением тока в проводнике, и отрицательным – в противном случае.

Если при обходе контура переходят от отрицательного полюса источника к положительному, то ЭДС этого источника считают положительной, в противном случае – отрицательной.

На рис. 9.7 замкнутый контур обходят против часовой стрелки. В данном случае сила тока I во всем контуре одинакова, направление тока выбрано против часовой стрелки. Тогда по второму правилу Кирхгофа

$$IR_1 + Ir_1 + IR_2 + Ir_2 + IR_3 + Ir_3 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3}{R_1 + r_1 + R_2 + r_2 + R_3 + r_3}.$$

Ток будет протекать в указанном направлении, если $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3 > 0$, т.е. $\mathcal{E}_1 > \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3$. Если $\mathcal{E}_1 < \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3$, ток в контуре будет протекать по часовой стрелке. При $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3$ $I = 0$.

Если в электрической схеме содержится N узлов, то по первому правилу Кирхгофа можно составить $(N - 1)$ независимых уравнений. По второму правилу Кирхгофа можно составить $n - (N - 1)$ уравнений, где n – число неизвестных токов в схеме.

9.6. Электрический ток в жидкостях.

Законы электролиза

Электрический ток может протекать не только в металлах, но и в расплавах и растворах электролитов: кислот, щелочей и солей. В растворах под влиянием электрического поля полярных молекул воды электронейтральная молекула распадается на положительно и отрицательно заряженные ионы (явление электролитической диссоциации). Упорядоченное движение ионов под действием электрического поля создает ток. У водных растворов и расплавов – ионная проводимость.

Концентрация заряженных ионов в растворах и расплавах увеличивается с ростом температуры, поэтому сопротивление электролитов с ростом температуры уменьшается.

В простейшем случае положительный ион, оказавшись на отрицательном электроде (катоде), присоединяет недостающие ему электроны. В результате на катоде выделяется из раствора вещество. Аналогичные процессы наблюдаются у положительного электрода (анода), к которому движутся отрицательно заряженные ионы. Процесс выделения на электроде вещества из раствора при прохождении через него электрического тока называется электролизом.

Первый закон электролиза утверждает, что масса вещества, выделявшаяся на электроде, пропорциональна заряду q , прошедшему через электролит:

$$m = kq \quad (9.19)$$

где k – электрохимический эквивалент вещества.

Химический эквивалент вещества есть отношение молярной массы вещества μ к его валентности n .

Второй закон электролиза утверждает, что электрохимический эквивалент вещества пропорционален его химическому эквиваленту:

$$k = \frac{1}{F} \left(\frac{\mu}{n} \right) \quad (9.20)$$

где $F = 9,65 \cdot 10^4$ Кл/моль – постоянная Фарадея.

В случае постоянного тока из формул (9.19) и (9.20) находим

$$m = \frac{1}{F} \left(\frac{\mu}{n} \right) q = \frac{1}{F} \left(\frac{\mu}{n} \right) I \Delta t \quad (9.21)$$

Предположим, что на электроде выделилась масса вещества, численно равная его химическому эквиваленту, т.е. $m = \frac{\mu}{n}$.

Тогда из (9.21) получим $1 = \frac{1}{F} q \Rightarrow q = F$. Следовательно, постоянная Фарадея – это заряд, который должен пройти через электролит, чтобы на электроде выделилась масса вещества, численно равная его химическому эквиваленту. При $n = 1$ ионы имеют заряд, равный по модулю заряду электрона $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Количество ионов в массе $m = \frac{\mu}{n}$ (в моле вещества) равно числу Авогадро $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹, поэтому заряд, переносимый ионами, $q = N_A |e|$. Следовательно,

$$F = N_A |e| \quad (9.22)$$

9.7. Электрический ток в газах. Плазма

Молекулы газов электронейтральны, поэтому газы в обычных условиях не проводят электрический ток. Под действием различных внешних воздействий (нагревание, рентгеновские лучи, α -излучение) молекула газа распадается на положительно заряженный ион и отрицательно заряженный электрон. В газе могут образовываться и отрицательные ионы из-за присоединения электронов к нейтральным атомам.

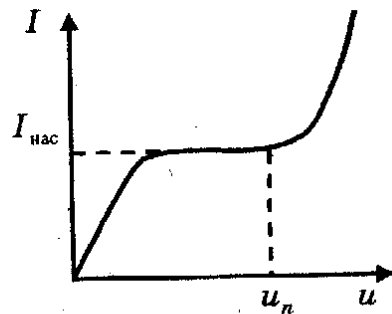


Рис. 9.8

Внешние воздействия, приводящие к появлению в газах свободных носителей зарядов, называют ионизаторами. Под действием электрического поля образовавшиеся

положительные ионы движутся к катоду, а электроны – к аноду, через газ протекает электрический ток (электрический, газовый разряд).

Электрический разряд, который происходит только в присутствии постоянно действующего внешнего ионизатора, называется самостоятельным. При увеличении напряжения между анодом и катодом ток возрастает, но лишь до определенного максимального значения, называемого током насыщения. Ток насыщения соответствует тому, что все образовавшиеся под действием ионизатора положительные ионы и электроны достигают электродов. Начиная с некоторого значения напряжения, электроны обладают достаточной энергией, чтобы ионизировать нейтральную молекулу (ионизация электронным ударом). Образующиеся новые свободные электроны также вызывают ионизацию других молекул газа. Происходит лавинообразное увеличение числа электронов и ионов и, как следствие, резко возрастает ток через газ. Зависимость тока, протекающего через газ, от напряжения между электродами представлена на рис. 9.8.

При напряжении $u > u_n$ электрический разряд больше не зависит от внешнего ионизатора. Такой разряд называют самостоятельным. Самостоятельными разрядами в газах являются: тлеющий, искровой и коронный разряды.

При электрическом разряде в газе наблюдается особое состояние вещества, называемое плазмой. Плазма – это частично или полностью ионизированный газ, в котором концентрация положительных и отрицательных зарядов практически совпадает. Плазма является электронейтральной системой.

9.8. Электрический ток в полупроводниках

К полупроводникам относят вещества, которые занимают промежуточное положение между проводниками, хорошо проводящими электрический ток, и диэлектриками (изоляторами), практически не проводящими ток. Полупроводниками являются: кремний Si, германий Ge, индий In, а также некоторые химические соединения.

В кристалле полупроводника, например, кремния Si, соседние атомы образуют ковалентную связь, причем от каждого атома в образовании этой связи участвует по одному валентному электрону. Электроны, образующие ковалентные связи, могут

перемещаться по всему кристаллу, оставаясь при этом связанными с атомами полупроводника. При низких температурах в полупроводнике практически нет свободных носителей зарядов, и он не проводит электрический ток. При повышении температуры наступает разрыв части ковалентных связей, и в полупроводнике появляются свободные электроны. Проводимость полупроводников, обусловленную наличием у них свободных электронов, называют электронной проводимостью.

В том месте кристалла полупроводника, где произошел разрыв ковалентной связи, образуется избыточный положительный заряд, называемый дыркой. Ковалентная связь может быть восстановлена присоединением связанного электрона, обеспечивающего другие ковалентные связи. При этом на месте, где ковалентная связь восстанавливается, дырка исчезает, там, где разрывается, образуется новая дырка. Если в полупроводнике отсутствует электрическое поле, движение дырок в нем происходит хаотично. При наличии электрического поля дырки перемещаются упорядоченно в направлении поля, в этом случае говорят о дырочной проводимости. Общий ток в полупроводнике I равен сумме дырочного I_p и электронного I_n токов:

$I = I_p + I_n$. Электронная и дырочная проводимости называются собственной проводимостью полупроводника. Из сказанного выше следует, что с ростом температуры электрическое сопротивление полупроводников уменьшается.

При наличии примесей в полупроводнике его сопротивление уменьшается. В этом случае говорят о примесной проводимости. При добавлении, например, в четырехвалентный германий Ge небольшого количества пятивалентного мышьяка As пятый валентный электрон атома мышьяка оказывается свободным, что приводит к резкому возрастанию концентрации свободных электронов. Примеси, подобные мышьяку, называют донорными, а полупроводники с донорными примесями называют полупроводниками n -типа. В полупроводниках n -типа концентрация свободных электронов много больше концентрации дырок. Свободные электроны в полупроводниках n -типа называют основными носителями, а дырки - неосновными.

При добавлении в четырехвалентный полупроводник трехвалентной примеси, например, индия In, в полупроводнике образуются дырки. Такие примеси называют акцепторными, а по-

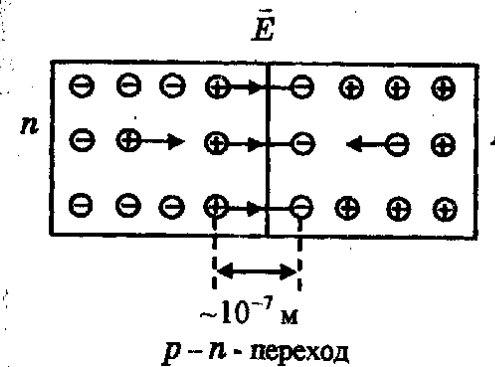


Рис. 9.9

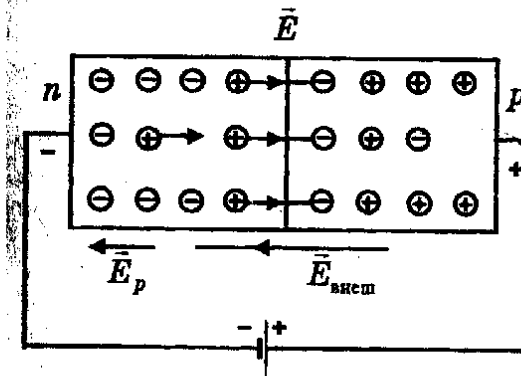


Рис. 9.10

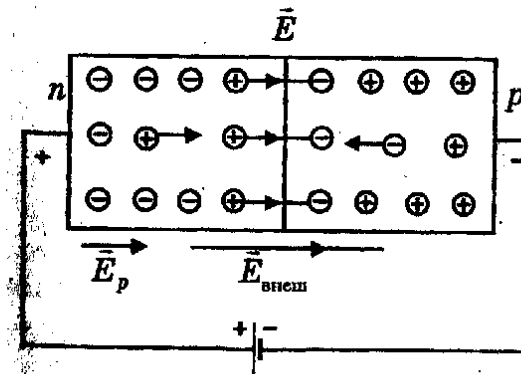


Рис. 9.11

лупроводники с акцепторными примесями - полупроводниками p -типа. В полупроводниках p -типа основными носителями являются дырки, а неосновными - электроны.

Контакт полупроводников p - и

n -типов называют p - n -переходом.

В результате диффузии основных носителей, т.е. электронов, из полупроводника n -типа в полупроводник p -типа, а дырок - в обратном направлении, образуется двойной заряженный слой толщиной $d \sim 10^{-7}$ м и разностью потенциалов $u \sim 0,5$ В (рис. 9.9).

В p - n -переходе возникает электрическое поле

$$E = \frac{u}{d} \sim 10^6 \text{ В/м,}$$

которое препятствует дальнейшей диффузии основ-

ных носителей.

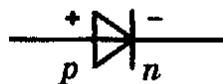


Рис. 9.12

Если полупроводник с $p-n$ -переходом включить в электрическую цепь, как показано на рис. 9.10 (прямой переход), то результирующее поле

$$E_p = E_{\text{внеш}} - E \text{ способствует движению основных носителей через } p-n\text{-переход.}$$

Сопротивление $p-n$ -перехода в этом случае мало, и в электрической цепи протекает ток.

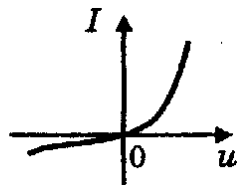


Рис. 9.13

Если полупроводник включить, как показано на рис. 9.11 (обратный переход), то результирующее поле $E_p = E_{\text{внеш}} + E$ препятствует движению основных носителей через $p-n$ -переход. В цепи протекает незначительный ток (в ряде случаев им можно пренебречь), вызванный движением

неосновных носителей через $p-n$ -переход. Сопротивление $p-n$ -перехода в этом случае очень большое.

Полупроводник с $p-n$ -переходом обладает односторонней проводимостью: в прямом направлении сопротивление перехода значительно меньше, чем в обратном. Его можно использовать в качестве диода для выпрямления переменного тока. На электрических схемах полупроводниковый диод изображают, как показано на рис. 9.12. Зависимость тока от приложенного к диоду напряжения (вольт-амперная характеристика) представлена на рис. 9.13.

9.9. Примеры решения задач

Задача 9.1. По медному проводу сечением $S=1 \text{ мм}^2$ протекает ток $I=10 \text{ мА}$. Найти среднюю скорость упорядоченного движения электронов вдоль проводника. Молярная масса меди $\mu = 63,6 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$, плотность $\rho = 8,9 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$. На каждый атом меди приходится один электрон проводимости.

Решение.

По формуле (9.4) сила тока $I = |e|nSv$, где v – средняя скорость. Для того, чтобы определить концентрацию свободных электронов n , рассмотрим массу m меди. Ее объем $V = \frac{m}{\rho}$. В

этом объеме содержится $N = \frac{m}{\mu} N_A$ атомов меди и такое же

количество свободных электронов ($N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ 1/моль}$ – число Авогадро). Концентрация

$$n = \frac{N}{V} = \left(\frac{m}{\mu} N_A \right) / \left(\frac{m}{\rho} \right) = \frac{\rho}{\mu} N_A = 0,84 \cdot 10^{29} \text{ м}^{-3}.$$

$$\text{Следовательно, } v = \frac{I}{|e|nS} = 7,4 \cdot 10^{-7} \text{ м/с} = 7,4 \cdot 10^{-5} \text{ см.}$$

Задача 9.2. Плоский конденсатор с пластинами квадратной

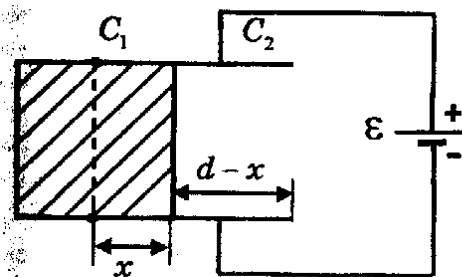


Рис. 9.14

формы размером $a \times a = 0,2 \times 0,2 \text{ м}^2$ и расстоянием между пластинами $d = 2 \text{ мм}$ присоединен к полюсам источника с ЭДС $\mathcal{E} = 750 \text{ В}$. В пространство между пластинами с постоянной скоростью $v = 0,08 \text{ м/с}$ вводит стеклянную пластинку толщиной $d = 2 \text{ мм}$. Какой ток будет протекать при этом в цепи? Диэлектрическая проницаемость стекла $\epsilon = 7$.

Решение.

Пусть в конденсатор введена часть стеклянной пластинки длиной $x = vt$. В этом случае к источнику подключены параллельно два конденсатора, емкости которых C_1 и C_2 (см.

рис. 9.14), причем $C_1 = \frac{\epsilon \epsilon_0 a x}{d}$, а $C_2 = \frac{\epsilon_0 a (a - x)}{d}$. Их общая

емкость $C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_0 a}{d} (\epsilon x + a - x) = \frac{\epsilon_0 a}{d} (a + vt(\epsilon - 1))$. Заряд этой системы изменяется в зависимости от x и времени t :

$$q(t) = \mathcal{E}(C_1 + C_2) = \mathcal{E} \frac{\epsilon_0 a}{d} (a + vt(\epsilon - 1)).$$

В цепи будет протекать электрический ток, сила которого

$$i(t) = q'(t) = \mathcal{E} \frac{\epsilon_0 a}{d} v(\epsilon - 1) = \text{const}.$$

После подстановки числовых значений получим:

$$i(t) = I = 3,2 \cdot 10^{-7} \text{ A}.$$

Задача 9.3. Четыре одинаковых резистора соединены как показано на рис. 9.15. Сопротивление каждого резистора равно R . Определить сопротивление между точками A и B . Сопротивлением соединительных проводов пренебречь.

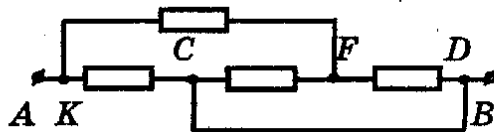


Рис. 9.15

Решение.

При решении подобных задач надо найти точки, имеющие одинаковый потенциал, а затем их совместить. В рассматриваемой задаче по проводу, соединяющему точки C и D , протекает электрический ток, но $\varphi_C - \varphi_D = IR_{\text{пр}} = 0$, так как сопротивление провода

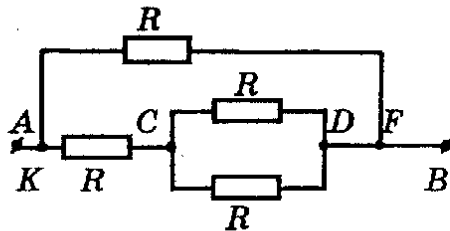


Рис. 9.16

$R_{\text{пр}} = 0 \Rightarrow \varphi_C = \varphi_D$. Совмещая точки C и D , получим эквивалентную схему, изображенную на рис. 9.16.

Сопротивление участка KCD этой цепи равно

$$R + \frac{R}{2} = \frac{3}{2}R. \text{ Общее сопротивление между точками } A \text{ и } B$$

находим по формуле параллельного соединения двух проводни-

$$\text{ков: } R_{AB} = \frac{R \cdot 3R/2}{R + 3R/2} = \frac{3}{5}R.$$

Задача 9.4. Амперметр рассчитан на максимальный ток I_0 .

Его сопротивление равно R_A . Какое сопротивление надо включить параллельно амперметру, чтобы им можно было измерять ток в n раз больший?

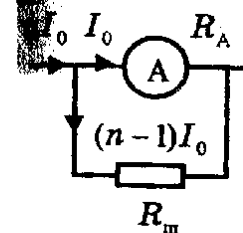


Рис. 9.17

Решение.

Сопротивление, о котором идет речь в условии задачи, называется шунтом. Шунт включают параллельно амперметру (рис. 9.17). По условию задачи общий ток равен nI_0 , ток через амперметр — I_0 , следовательно, через шунт протекает ток $nI_0 - I_0 = (n-1)I_0$. Так как напряжение на амперметре и шунте одинаково, то

$$I_0 R_A = (n-1)I_0 R_{\text{ш}} \Rightarrow R_{\text{ш}} = \frac{R_A}{n-1}.$$

Задача 9.5. Вольтметром можно измерять максимальное напряжение u_0 . Его сопротивление равно R_V . Какое сопротивление надо включить последовательно с вольтметром, чтобы можно было измерять напряжение в n раз больше?

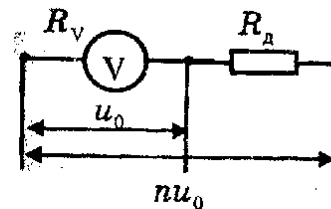


Рис. 9.18

Решение.

Сопротивление, о котором идет речь в условии задачи, называется добавочным. Его включают последовательно с вольтметром (рис. 9.18). По условию задачи общее напряжение — nu_0 , причем напряжение на

вольтметре — u_0 . Следовательно, на добавочном сопротивлении напряжение равно $nu_0 - u_0 = (n-1)u_0$. Так как ток через вольтметр и добавочное сопротивление одинаков, то

$$\frac{u_0}{R_V} = \frac{(n-1)u_0}{R_A} \Rightarrow R_A = (n-1)R_V.$$

Задача 9.6. Если к амперметру, рассчитанному на максимальную силу тока $I = 2$ А, присоединить шунт сопротивлением $r = 0,5$ Ом, то цена деления шкалы амперметра возрастет в 10 раз. Определить, какое добавочное сопротивление необходимо присоединить к тому же амперметру, чтобы его можно было использовать как вольтметр, измеряющий напряжение до $u = 220$ В.

Решение.

Так как цена деления амперметра возросла в 10 раз, то и максимальное значение тока, измеряемое им, возросло в 10 раз. В задаче 9.4. было показано, что сопротивление шунта

$r = \frac{R_A}{n-1}$. В нашем случае $n = 10$, поэтому сопротивление ам-

перметра $R_A = (n-1)r = 9r$. На такой амперметр (без добавочных сопротивлений) можно подавать максимальное напряжение $u_{\max} = IR_A = 9Ir = 9$ В. Этим прибором необходимо измерять

напряжение в $m = \frac{u}{u_{\max}} = \frac{220}{9}$ раз большее. Для этого, как по-

казано в задаче 9.5., последовательно к прибору подключают добавочное сопротивление

$$R_d = (m-1)R_A = (m-1)9r = \left(\frac{220}{9} - 1\right) \cdot 9 \cdot 0,5 \text{ Ом} = 105,5 \text{ Ом}.$$

Задача 9.7. В схему включены два микроамперметра и два одинаковых вольтметра (рис. 9.19). Показания микроамперметров $I_1 = 100$ мкА и $I_2 = 99$ мкА; показания вольтметра $u_1 = 10$ В. Найти показания вольтметра u_2 .

Решение.

Через первый вольтметр протекает ток I_1 .

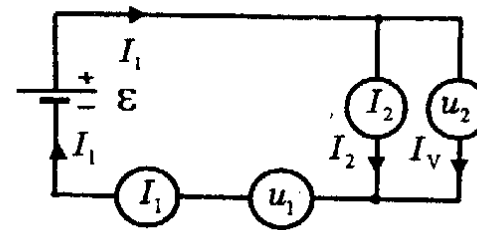


Рис. 9.19

Следовательно, его сопротивление

$$R_V = \frac{u_1}{I_1}.$$

По условию задачи таким же сопротивлением обладает второй вольтметр. Сила тока через второй вольтметр

$$I_V = I_1 - I_2,$$

поэтому он показывает напряжение

$$u_2 = I_V R_V = (I_1 - I_2) \frac{u_1}{I_1} = \left(1 - \frac{I_2}{I_1}\right) u_1 = 0,1 \text{ В}.$$

Задача 9.8. Для регулирования напряжения на нагрузке собрана схема, изображенная на рис. 9.20. Сопротивление нагрузки и полное сопротивление реостата равны R . Нагрузка подключена к половине реостата. Входное напряжение, подаваемое на клеммы A и B , неизменно. Опре-

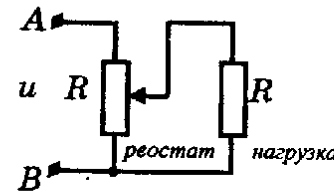


Рис. 9.20

определить, как изменится напряжение на нагрузке, если ее сопротивление увеличить в 2 раза.

Решение.

Пусть входное напряжение равно u и нагрузка подключена к половине реостата. Соответствующая эквивалентная схема представлена на рис. 9.21. Общее сопротивление параллельно соединенных ре-

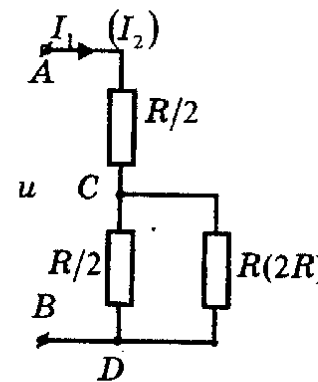


Рис. 9.21

зисторов $R/2$ и R равно $\frac{R/2 \cdot R}{R/2 + R} = \frac{R}{3}$, общее сопротивление

цепи между точками A и B равно $\frac{R}{2} + \frac{R}{3} = \frac{5}{6}R$. Общий ток в

$$\text{цепи } I_1 = \frac{u}{5R/6} = \frac{6u}{5R}.$$

Напряжение между точками C и D равно $u_1 = I_1 \cdot \frac{R}{3} = \frac{6u}{5R} \cdot \frac{R}{3} = \frac{2u}{5}$. Это и есть напряжение на нагрузочном резисторе R в первом случае.

Во втором случае сопротивление между точками C и D равно $\frac{R/2 \cdot 2R}{R/2 + 2R} = \frac{2}{5}R$. Общее сопротивление цепи равно

$$\frac{R}{2} + \frac{2}{5}R = \frac{9R}{10}. \text{ Общий ток } I_2 = \frac{u}{9R/10} = \frac{10u}{9R}.$$

Напряжение на участке CD , равное напряжению на нагрузке во втором случае, $u_2 = I_2 \cdot \frac{2R}{5} = \frac{10u}{9R} \cdot \frac{2R}{5} = \frac{4u}{9}$.

$$\text{Отношение напряжений на нагрузке } \frac{u_2}{u_1} = \frac{10}{9}.$$

Задача 9.9. На клеммы AB (рис. 9.22) подается такое меняющееся во времени напряжение, что напряжение на обкладках конденсатора меняется по закону, представленному на рис. 9.23. Построить график зависимости напряжения от времени на клеммах CD .

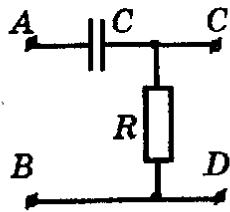


Рис. 9.22

Решение.

Напряжение на клеммах AB – это напряжение на последовательно соединенных конденсаторе C и резисторе R . Напряжение на клеммах CD – это напряжение на

резисторе R . Пусть напряжение на конденсаторе – $u(t)$, тогда

его заряд $q(t) = Cu(t)$. Следовательно, сила тока $i(t)$, протекающего через конденсатор и последовательно подключенный к нему резистор, равна производной от заряда по времени:

$$i(t) = q'(t) = (Cu(t))' = Cu'(t).$$

Напряжение на резисторе $u_{CD} = i(t)R = CRu'(t)$.

При $t \in [0, t_0]$ $u(t) = 0 \Rightarrow u_{CD} = 0$; при $t \in [t_0, 2t_0]$ $u(t)$ является линейной функцией времени, следовательно, производная от $u(t)$ есть константа, численно равная $\text{tg}\alpha$ (рис. 9.23). Значит,

$$u_{CD} = u_1 = CR\text{tg}\alpha.$$

При $t \in [2t_0, 3t_0]$

$$u(t) = \text{const} \Rightarrow u'(t) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow u_{CD} = 0$; при

$t \in [3t_0, 5t_0]$ $u(t)$ – линейная функция времени, поэтому $u'(t) = \text{tg}\gamma = -\text{tg}\beta < 0$.

Значит, $u_{CD} = -CR\text{tg}\beta$. Из рис. 9.23 следует, что

$$\text{tg}\beta = \frac{1}{2}\text{tg}\alpha. \text{ График зависи-}$$

мости напряжения на клеммах CD представлен на рис. 9.24. Из графика видно, что в случае, когда напряжение на конденсаторе постоянно ($t \in [2t_0, 3t_0]$), ток

$i(t) = 0$, т.е. постоянный электрический ток через конденсатор не протекает.

Задача 9.10. Определить внутреннее сопротивление аккумулятора, если известно, что при замыкании его на внешнее сопротивление $R_1 = 1 \text{ Ом}$ напряжение на зажимах аккумулятора

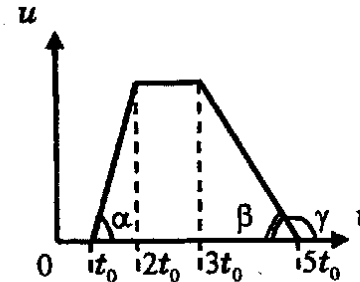


Рис. 9.23

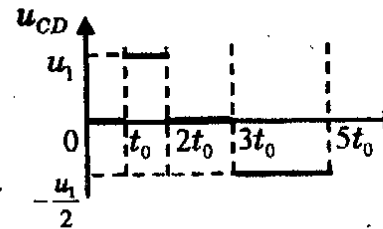


Рис. 9.24

$u_1 = 2$ В, а при замыкании на сопротивление $R_2 = 2$ Ом напряжение на зажимах $u_2 = 2,4$ В (рис. 9.25).

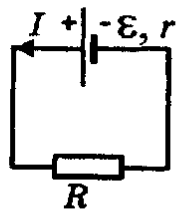


Рис. 9.25

Решение.
Напряжение на зажимах аккумулятора u — это напряжение на внешнем сопротивлении R . По закону Ома для замкнутой цепи $\varepsilon = u + Ir$, где сила тока в цепи $I = \frac{u}{R}$. Используя условия

задачи, составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} \varepsilon = u_1 + \frac{u_1}{R_1} r, \\ \varepsilon = u_2 + \frac{u_2}{R_2} r, \end{cases} \Rightarrow u_1 + \frac{u_1}{R_1} r = u_2 + \frac{u_2}{R_2} r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{u_1}{R_1} - \frac{u_2}{R_2} \right) r = u_2 - u_1 \Rightarrow r = \frac{u_2 - u_1}{u_1/R_1 - u_2/R_2} = 0,5 \text{ Ом.}$$

Задача 9.11. Определить заряд конденсатора в схеме, изображенной на рис. 9.26. $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 20$ Ом; $\varepsilon = 500$ В; $r = 10$ Ом; $C = 10$ мкФ.

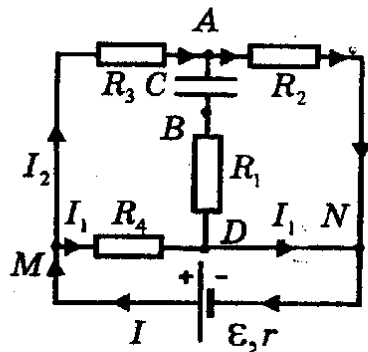


Рис. 9.26

Решение.
При решении подобных задач надо учитывать, что постоянный электрический ток через конденсатор не протекает. Стрелками на рисунке показано, как протекает ток в этой цепи. Для того, чтобы найти заряд конденсатора, надо знать разность потенциалов $\varphi_A - \varphi_B$ на его обкладках. Так как через резистор R_1 ток не протекает, то

$\varphi_B - \varphi_D = 0 \Rightarrow \varphi_B = \varphi_D$. Так как точки D и N соединены проводом, сопротивление которого $R_{пр} = 0$, то

$\varphi_D - \varphi_N = 0 \Rightarrow \varphi_N = \varphi_D = \varphi_B$. Таким образом, разность потенциалов на обкладках конденсатора C $\varphi_A - \varphi_B = \varphi_A - \varphi_N$, а это есть напряжение на резисторе R_2 . Пусть $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$, тогда сопротивление цепи между точками M и N $R_{MN} = \frac{2R \cdot R}{2R + R} = \frac{2}{3}R$. Общий ток

$I = \frac{\varepsilon}{2R/3 + r} = \frac{3\varepsilon}{2R + 3r}$. Разность потенциалов между точками

M и N $\varphi_M - \varphi_N = IR_{MN} = \frac{3\varepsilon}{2R + 3r} \cdot \frac{2}{3}R = \frac{2\varepsilon R}{2R + 3r}$. Сила тока через последовательно соединенные резисторы R_2 и R_3

$I_2 = \frac{\varphi_M - \varphi_N}{R_2 + R_3} = \frac{\varepsilon}{2R + 3r}$. Разность потенциалов между точками

A и N $\varphi_A - \varphi_N = \varphi_A - \varphi_B = I_2 R_2 = \frac{\varepsilon R}{2R + 3r}$. Заряд конденсатора $q = C(\varphi_A - \varphi_B) = \frac{\varepsilon RC}{2R + 3r} \approx 1,43 \cdot 10^3$ Кл.

конденсатора $q = C(\varphi_A - \varphi_B) = \frac{\varepsilon RC}{2R + 3r} \approx 1,43 \cdot 10^3$ Кл.

Задача 9.12. Определить заряд конденсатора C в схеме, изображенной на рис. 9.27. Внутренним сопротивлением батареек пренебречь.

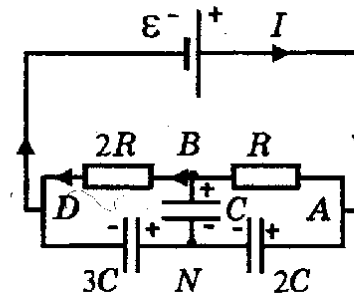


Рис. 9.27

Решение.
Стрелками показано направление тока I в цепи (постоянный ток через конденсатор не протекает), причем $I = \frac{\varepsilon}{3R}$. Разность потенциалов между точками A и B

$\varphi_A - \varphi_B = IR = \frac{\varepsilon}{3}$, а разность потенциалов между точками B

и D $\varphi_B - \varphi_D = I \cdot 2R = \frac{2\varepsilon}{3}$. Пусть q_1, q_2, q_3 - модули зарядов конденсаторов $C, 2C, 3C$ соответственно. Предположим, что пластины конденсаторов заряжены так, как показано на рис. 9.27. N - общая точка трех пластин, которые не подключены к источнику. Тогда их суммарный заряд равен нулю, т.е. $-q_1 - q_2 + q_3 = 0$.

Пусть u_1, u_2, u_3 - напряжения на конденсаторах. Тогда $q_1 = Cu_1, q_2 = 2Cu_2, q_3 = 3Cu_3$ и последнее уравнение приводится к виду: $3u_3 - u_1 - 2u_2 = 0$ (1).

Запишем очевидное алгебраическое равенство:

$$(\varphi_B - \varphi_N) + (\varphi_N - \varphi_D) = \varphi_B - \varphi_D.$$

В этом равенстве $\varphi_B - \varphi_D = \frac{2\varepsilon}{3}$, $\varphi_B - \varphi_N = u_1$, а

$\varphi_N - \varphi_D = u_3$, поэтому $u_1 + u_3 = \frac{2\varepsilon}{3}$ (2).

Запишем еще одно равенство:

$$(\varphi_A - \varphi_N) - (\varphi_B - \varphi_N) = \varphi_A - \varphi_B.$$

В этом равенстве $\varphi_A - \varphi_B = \frac{\varepsilon}{3}$, $\varphi_A - \varphi_N = u_2$,

$\varphi_B - \varphi_N = u_1$, поэтому $u_2 - u_1 = \frac{\varepsilon}{3}$ (3).

Получаем систему трех уравнений:

$$\begin{cases} 3u_3 - u_1 - 2u_2 = 0, \\ u_1 + u_3 = \frac{2\varepsilon}{3}, \\ u_2 - u_1 = \frac{\varepsilon}{3}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3u_3 + 2u_2, \\ 4u_3 - 2u_2 = \frac{2\varepsilon}{3}, \\ 3u_2 - 3u_3 = \frac{\varepsilon}{3}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{2\varepsilon}{9}, \\ u_2 = \frac{5\varepsilon}{9}, \\ u_3 = \frac{4\varepsilon}{9}. \end{cases}$$

Так как все напряжения положительны, то предположение о знаках зарядов на обкладках конденсатора C верно. Зная напряжения, находим заряды конденсаторов:

$$q_1 = \frac{2C\varepsilon}{9}, \quad q_2 = \frac{10C\varepsilon}{9}, \quad q_3 = \frac{4C\varepsilon}{3}.$$

Задача 9.13. Определить разность потенциалов на конденсаторе C в схеме, изображенной на рис. 9.28. Параметры схемы заданы на рисунке. Внутренним сопротивлением источников пренебречь. Какой знак будет иметь заряд на верхней пластине конденсатора?

Решение.

Участок электрической цепи между точками A и B содержит конденсатор, поэтому ток на этом участке не протекает. Предположим, что ток I в цепи направлен как показано на рис. 9.28. Замкнутый контур $MNKL$ обходим против часовой стрелки. По второму правилу Кирхгофа получаем

$$2\varepsilon - \varepsilon = I \cdot 2R + I \cdot R \Rightarrow I = \frac{\varepsilon}{3R}.$$

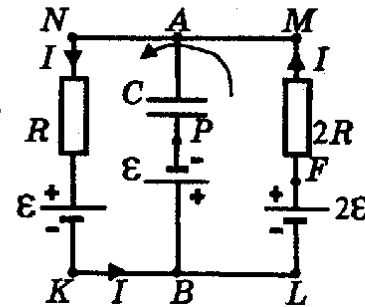


Рис. 9.28

Так как $I > 0$, то направление тока было выбрано правильно. Поскольку сопротивлением источника можно пренебречь, то $\varphi_D - \varphi_B = 2\varepsilon$ и $\varphi_D - \varphi_A = I \cdot 2R$.

После вычитания этих уравнений получаем

$$\varphi_A - \varphi_B = 2\varepsilon - 2RI = \frac{4\varepsilon}{3}.$$

Предположим, что верхняя пластина конденсатора имеет положительный заряд, тогда $\varphi_A > \varphi_B$, причем $\varphi_A - \varphi_B = u$ - есть искомое напряжение на конденсаторе. Кроме того, $\varphi_B - \varphi_D = \varepsilon$. Проводя вычитание последних двух уравнений, получаем

$$\varphi_A - \varphi_B = u - \varepsilon \Rightarrow u = (\varphi_A - \varphi_B) + \varepsilon =$$

$= \frac{4\varepsilon}{3} + \varepsilon = \frac{7\varepsilon}{3}$. Так как $u > 0$, то предположение о том, что верхняя пластина заряжена положительно, верно.

Задача 9.14. Дана электрическая цепь, содержащая источник ЭДС. К источнику подключено внешнее сопротивление R . Найти полезную мощность и коэффициент полезного действия цепи (рис. 9.29).

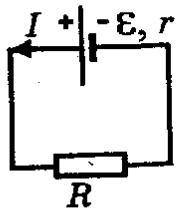


Рис. 9.29

Решение.

Полезная мощность — это мощность, которая выделяется на внешнем сопротивлении R . Во всей цепи выделяется мощность, равная работе источника в единицу времени, т.е. εI , где I — сила тока в цепи. При этом на внутреннем сопротивлении источника выделяется мощность $I^2 r$.

По закону сохранения энергии

$$\varepsilon I = I^2 r + P_n, \quad (9.23)$$

где P_n — полезная мощность. Формулу (9.23) удобно использовать при решении ряда задач.

Сила тока в цепи $I = \frac{\varepsilon}{R+r}$, поэтому полезная мощность

$$P_n = I^2 R = \left(\frac{\varepsilon}{R+r} \right)^2 R. \text{ Исследуем полезную мощность как}$$

функцию внешнего сопротивления R . Для этого найдем производную от полезной мощности

$$\begin{aligned} P_n' &= \left(\frac{\varepsilon^2}{(R+r)^2} R \right)' = \varepsilon^2 \frac{R'(R+r)^2 - R((R+r)')^2}{(R+r)^4} = \\ &= \varepsilon^2 \frac{(R+r)^2 - 2R(R+r)}{(R+r)^4} = \varepsilon^2 \frac{r-R}{(R+r)^3}. \end{aligned}$$

$P_n' = 0$ если $r = R$. При $R < r$ $P_n' > 0$, поэтому $P_n(R)$ возрастает, а при $R > r$ $P_n' < 0$, поэтому $P_n(R)$ убывает. График зависимости $P_n(R)$ представлен на рис. 9.30. Полезная

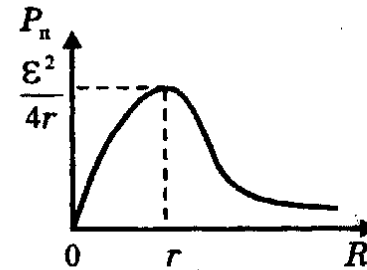


Рис. 9.30

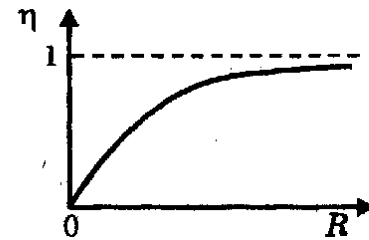


Рис. 9.31

мощность достигает максимального значения, равного $\frac{\varepsilon^2}{4r}$ при $R = r$.

Коэффициент полезного действия электрической цепи $\eta = \frac{P_n}{P}$, где P — мощность,

выделяющаяся во всей цепи. Так как $P_n = I^2 R$,

а $P = I^2 (R+r)$, то

$\eta = \frac{R}{R+r}$. График зависимости η от внешнего сопротивления R представлен на рис. 9.31.

9.31.

Задача 9.15. Генератор мощностью P вырабатывает электроэнергию, которая передается потребителю по проводам, общее сопротивление которых равно R . Напряжение генератора — u . Определить отношение мощности, выделяемой на нагрузке у потребителя, к мощности генератора. Сопротивлением генератора пренебречь.

Решение.

Провода и нагрузка подключены к генератору последовательно. Поэтому в цепи по проводам и нагрузке протекает одинаковый ток. Так как известны мощность генератора и вырабатываемое им напряжение, то $P = uI$, где I — сила тока в цепи.

Следовательно, $I = \frac{P}{u}$. Тепловая мощность, которая выделяется

в проводах, $P_{пр} = I^2 R$. Мощность, которая выделяется на нагрузке у потребителя, $P_n = P - P_{пр} = P - I^2 R$.

Искомое отношение:

$$\frac{P_n}{P} = \frac{P - I^2 R}{P} = \frac{P - (P/u)^2 R}{P} = 1 - \frac{PR}{u^2}$$

Задача 9.16. Из однородной проволоки постоянного сечения собрана электрическая схема в виде прямоугольника со сторонами $a = 6 \text{ см}$ и $b = 8 \text{ см}$ (рис. 9.32). Найти отношение количеств теплоты $\frac{Q_{1-2}}{Q_{3-4}}$, выделяющихся в единицу времени на участках 1-2 и 3-4.

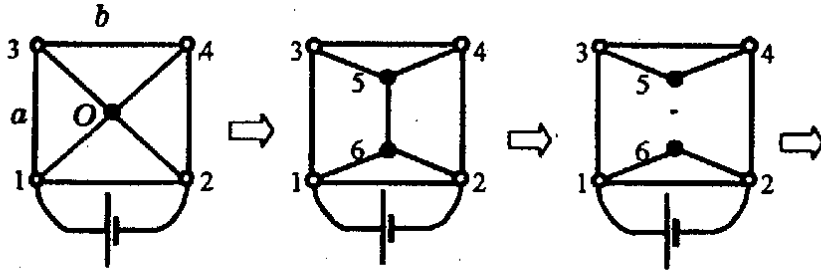


Рис. 9.32

Рис. 9.33

Рис. 9.34

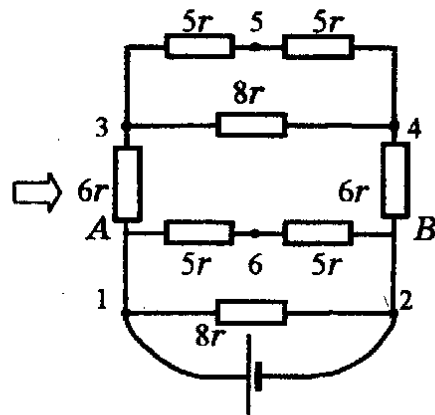


Рис. 9.35

Решение. Представим центральное соединение O в виде двух узлов, соединенных проводом 5-6 (рис. 9.33). Из симметрии схемы следует, что тока в этом проводе нет. Следовательно, можно перейти к эквивалентной схеме, представленной на рис. 9.34. Сопротивление проводника выражается формулой $R = \rho \frac{l}{S}$, по-

этому сопротивления отдельных участков схемы равны:

$$R_{1-2} = R_{3-4} = 8r; \quad R_{1-3} = R_{2-4} = 6r;$$

$R_{3-5} = R_{1-6} = R_{4-5} = R_{2-6} = 5r$, где $r > 0$ (r – сопротивление единицы длины проволоки). Соответствующая эквивалентная схема представлена на рис. 9.35. Пусть напряжение между точками 1-2 равно u , а мощность, выделяющаяся на участке 1-2,

$$P_{1-2} = \frac{u^2}{8r} = Q_{1-2}.$$

Напряжение между точками A и B равно u . Сопротивление участка цепи между точками 3 и 4

$$R'_{3-4} = \frac{10r \cdot 8r}{10r + 8r} = \frac{40r}{9}.$$

Эквивалентная схема участка цепи $A-5-B$ представлена на рис. 9.36.

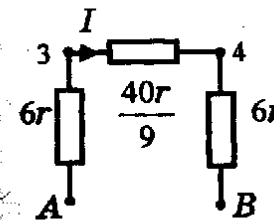


Рис. 9.36

Общее сопротивление этого участка $R_{AB} = 12r + \frac{40r}{9} = \frac{148r}{9}$. Ток в этом участке $I = \frac{u}{R_{AB}} = \frac{9u}{148r}$. Мощ-

ность, выделяющаяся на участке 3-4 – это мощность, которая выделяется в

сопротивлении R'_{3-4} :

$$P_{3-4} = I^2 R'_{3-4} = \left(\frac{9u}{148r} \right)^2 \cdot \left(\frac{40r}{9} \right) = \frac{90u^2}{5476r} = Q_{3-4}.$$

Искомое отношение:

$$\frac{Q_{1-2}}{Q_{3-4}} = \left(\frac{u^2}{8r} \right) / \left(\frac{90u^2}{5476r} \right) = \frac{1369}{180} = 7,6.$$

Задача 9.17. Конденсатор емкостью C , заряженный до разности потенциалов \mathcal{E} , подключается через большое сопротивление к батарее с ЭДС $5\mathcal{E}$. Определить количество тепла, которое выделится при зарядке конденсатора до напряжения $5\mathcal{E}$. Подключение конденсатора производится по схеме, изображенной на рис. 9.37.

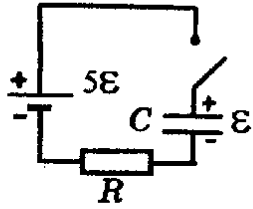


Рис. 9.37

Решение.

Начальный заряд конденсатора $q_0 = C\varepsilon$. Когда конденсатор зарядится до напряжения 5ε , его заряд $q_1 = C \cdot 5\varepsilon$. При этом через источник пройдет заряд $\Delta q = q_1 - q_0 = 4C\varepsilon$. Источник при этом совершит работу $A = (5\varepsilon)\Delta q = (5\varepsilon)4C\varepsilon = 20C\varepsilon^2$. Эта

работа идет на выделение тепла в цепи и на увеличение энергии конденсатора $A = Q + \Delta W$, где $\Delta W = W_1 - W_0$. Начальная энергия конденсатора $W_0 = \frac{C\varepsilon^2}{2}$. Конечное значение энергии

$$\text{конденсатора } W_1 = \frac{C(5\varepsilon)^2}{2} = \frac{25C\varepsilon^2}{2}$$

$$\text{Поэтому } \Delta W = W_1 - W_0 = \frac{25C\varepsilon^2}{2} - \frac{C\varepsilon^2}{2} = 12C\varepsilon^2.$$

Выделившаяся в цепи теплота:

$$Q = A - \Delta W = 20C\varepsilon^2 - 12C\varepsilon^2 = 8C\varepsilon^2.$$

Задача 9.18. При никелировании изделия толщина слоя никеля росла со скоростью $v = 9 \cdot 10^{-9}$ м/с. Определить плотность тока при электролизе. Электрохимический эквивалент и плотность никеля равны соответственно $k = 3 \cdot 10^{-7}$ кг/Кл, $\rho = 8,9 \cdot 10^3$ кг/м³.

Решение.

Масса, выделившаяся при электролизе никеля, $m = kq = kIt = kjsSt$, где t – время протекания тока, j – его плотность, S – площадь изделия. С другой стороны, $m = \rho V = \rho Sh$, где h – толщина слоя никеля.

Итак, $\rho Sh = kjsSt \Rightarrow \rho \frac{h}{t} = kj$, где $\frac{h}{t} = v$ – скорость роста покрытия.

$$\rho v = kj \Rightarrow j = \frac{\rho v}{k} = 267 \text{ А/м}^2.$$

Задача 9.19. В схеме, изображенной на рис. 9.38, $C_2 = 10$ мкФ, $R = 2$ кОм. Площадь пластин конденсатора C_1 $S = 100$ см², расстояние между ними $d = 5$ мм. Мощность рентгеновского излучателя, который ионизирует воздух между пластинами конденсатора C_1 , равна

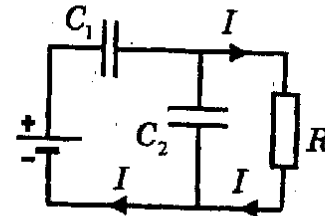


Рис. 9.38

$n = 2 \cdot 10^{12}$ пар носителей заряда за 1с в 1м³. Заряд носителей равен элементарному заряду $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Все образовавшиеся носители заряда достигают пластин конденсатора C_1 .

Определить заряд конденсатора C_2 .

Решение.

В пространстве между пластинами конденсатора C_1 образуются положительно заряженные ионы и электроны, которые под действием электрического поля движутся в противоположных направлениях, создавая электрический ток через резистор R . За промежуток времени Δt под действием рентгеновского излучения в объеме V образуется $N = nV\Delta t$ пар носителей зарядов. Так как $V = Sd$ и каждому положительно заряженному иону соответствует отрицательно заряженный электрон, то переносимый за время Δt полный заряд $q = 2|e|N = 2|e|nSd\Delta t$. Следовательно, через резистор R протекает ток

$$I = \frac{q}{\Delta t} = 2|e|nSd. \text{ Напряжение на резисторе}$$

$u = IR = 2|e|nSdR$ равно напряжению на конденсаторе C_2 . Поэтому его заряд $q_2 = C_2 u = 2|e|nSdC_2 R = 6,4 \cdot 10^{-13}$ Кл.

Задача 9.20. Имеется идеальный запирающий слой с $p-n$ -переходом. Толщина этого слоя — d , диэлектрическая проницаемость — ϵ . Нарисовать график изменения напряженности и потенциала электростатического поля, если распределение плотности заряда ρ в слое такое, как представлено на рис. 9.39.

Решение.

Найдем напряженность электростатического поля в точке A , расположенной на расстоянии $x > 0$ от середины запирающего слоя. Для этого весь слой разобьем на участки толщиной $\Delta l \rightarrow 0$ и площадью S , равной площади сечения запирающего слоя (рис. 9.40). Модуль заряда как положительной, так и отрицательной пластин $Q = \rho_0 V = \rho_0 S \Delta l$. Следовательно, модуль по-

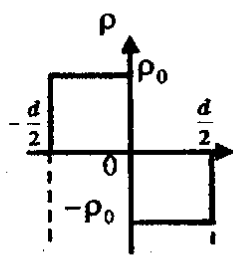


Рис. 9.39

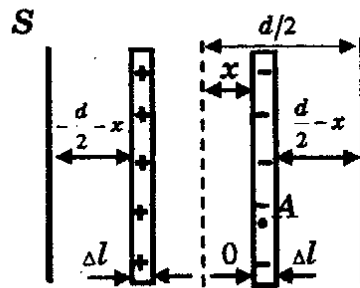


Рис. 9.40

верхностной плотности заряда каждой пластины $\sigma = \frac{Q}{S} = \rho_0 \Delta l$.

Пластина создает поле, модуль напряженности которого

$E_0 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0\epsilon}$. Две противоположно заряженные пластины, расположенные симметрично, в точке A создают поле с напряженно-

стью $E_1 = 2E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0\epsilon} = \frac{\rho_0 \Delta l}{\epsilon_0\epsilon}$. Вне этой пары поле, создаваемое

двумя рассматриваемыми пластинами, равно нулю. Таким образом, в точке A поле создается пластинами, расположенными в

слоях толщиной $(\frac{d}{2} - x)$ при $x \geq 0$.

Если $x < 0$, то толщина слоя, создающего поле, равна

$$\left| -\frac{d}{2} - x \right| = \left| \frac{d}{2} + x \right|, \text{ где } d > 0, \text{ а } x < 0. \text{ Из чертежа следует, что}$$

$$\frac{d}{2} > |x| \Rightarrow \frac{d}{2} > -x \Rightarrow \frac{d}{2} + x > 0 \Rightarrow \left| \frac{d}{2} + x \right| = \frac{d}{2} + x.$$

Рассматривая пары симметрично расположенных пластин, находим результирующую напряженность:

$$E = \sum E_1 = \sum \frac{\rho_0 \Delta l}{\epsilon_0\epsilon} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0\epsilon} \sum \Delta l = \frac{\rho_0}{\epsilon_0\epsilon} \left(\frac{d}{2} - x \right) \text{ при } x \geq 0$$

или $E = \frac{\rho_0}{\epsilon_0\epsilon} \left(\frac{d}{2} + x \right)$ при $x < 0$. График напряженности электростатического поля в запирающем слое приведен на рис. 9.41.

Пусть потенциал середины слоя $\phi_0 = 0$. Рассмотрим положительный заряд q , расположенный первоначально в середине слоя. Со стороны электростатического поля, существующего внутри $p-n$ -перехода, на заряд действует кулоновская сила $F(x) = E(x)q$. График зависимости силы от координаты приведен на рис. 9.42. Под действием силы заряд q перемещается

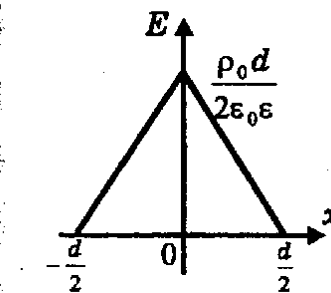


Рис. 9.41

в точку с координатой $x > 0$ и потенциалом $\phi(x)$. При этом кулоновская сила совершает положительную работу

$A = q(\phi_0 - \phi(x)) = -q\phi(x)$. С другой стороны, работа переменной силы численно равна площади криволинейной трапеции $OABC$ (рис. 9.42) (см. главу 3). Итак, $A = \frac{F_1 + F_0}{2} \cdot x$, где

$$F_0 = F(0) = \frac{\rho_0 dq}{2\epsilon_0 \epsilon}, \quad F_1 = F(x) = \frac{\rho_0 q}{\epsilon_0 \epsilon} \left(\frac{d}{2} - x \right).$$

После подстановки получим $A = \frac{\rho_0 q}{2\epsilon_0 \epsilon} (dx - x^2)$.

Приравнивая выражения для работы, получаем уравнение

$$\frac{\rho_0 q}{2\epsilon_0 \epsilon} (dx - x^2) = -q\varphi(x) \Rightarrow \varphi(x) = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0 \epsilon} (x^2 - dx), \quad (x > 0).$$

При перемещении заряда $q > 0$ из середины слоя в точку с координатой $x < 0$ кулоновская сила направлена против перемещения, и поэтому ее работа отрицательна. Модуль работы численно равен площади трапеции $NDAO$ (рис. 9.42).

$$|A| = \frac{F_1 + F_0}{2} \cdot |x| = \left(\frac{\rho_0 dq}{2\epsilon_0 \epsilon} + \frac{\rho_0 q}{\epsilon_0 \epsilon} \left(\frac{d}{2} + x \right) \right) \frac{|x|}{2}.$$

Работа $A < 0$, поэтому:

$$\begin{aligned} A = -|A| &= - \left(\frac{\rho_0 dq}{2\epsilon_0 \epsilon} + \frac{\rho_0 q}{\epsilon_0 \epsilon} \left(\frac{d}{2} + x \right) \right) \frac{|x|}{2} = \\ &= - \left(\frac{\rho_0 dq}{\epsilon_0 \epsilon} + \frac{\rho_0 qx}{\epsilon_0 \epsilon} \right) \frac{|x|}{2} = - \frac{\rho_0 q}{2\epsilon_0 \epsilon} (d + x)|x|. \end{aligned}$$

Так как $x < 0$, то $|x| = -x$ и $A = \frac{\rho_0 q}{2\epsilon_0 \epsilon} (dx + x^2)$.

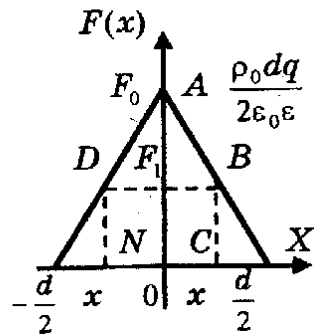


Рис. 9.42

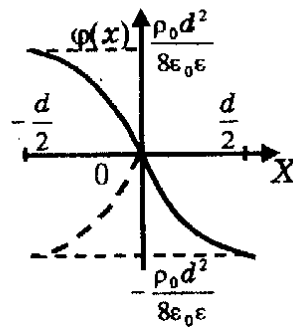


Рис. 9.43

С другой стороны, $A = -q\varphi(x)$. Приравнивая, находим $\varphi(x) = \frac{-\rho_0}{2\epsilon_0 \epsilon} (dx + x^2)$ при $(x < 0)$. График зависимости потенциала электростатического поля приведен на рис. 9.43.

Глава 10. Магнитное поле. Электромагнитная индукция

10.1. Основные магнитные явления

Неподвижные электрические заряды создают вокруг себя электрическое поле. Движущиеся заряды создают также и магнитное поле. Основные свойства магнитного поля, установленные экспериментально, таковы:

1. Магнитное поле порождается электрическим током (движущимися зарядами).

2. Магнитное поле обнаруживается по действию на электрический ток (движущиеся заряды).

Магнитное поле существует вокруг любого проводника, по которому протекает электрический ток. Кроме того, магнитное поле создается постоянными магнитами. Перечислим основные явления, подтверждающие существование магнитного поля.

1. Магнитное поле оказывает ориентирующее действие на магнитную стрелку.

2. Два параллельных провода, по которым протекают токи одного направления, притягиваются; если же по этим проводам протекают токи противоположного направления, то они отталкиваются.

3. Магнитное поле оказывает ориентирующее действие на замкнутый контур (рамку) с током. В частности, вблизи провода, по которому протекает ток, рамка с током располагается в одной плоскости с проводом.

4. Магнитное поле действует на движущийся электрический заряд.

5. Магнитное поле действует на проводник с током.

10.2. Вектор магнитной индукции

Важнейшей характеристикой магнитного поля является вектор магнитной индукции \vec{B} . Модуль вектора магнитной индукции может быть определен двумя способами.

Известно, что магнитное поле действует с некоторой силой на проводник с током, причем эта сила максимальна, когда век-

тор магнитной индукции перпендикулярен проводнику. Тогда модуль вектора магнитной индукции определяется формулой

$$B = \frac{F_{\max}}{I\Delta l} \quad (10.1)$$

где F_{\max} – максимальная сила, действующая на участок проводника Δl , по которому протекает ток силой I .

Другой способ определения модуля вектора \vec{B} основан на том, что на замкнутый контур с током I со стороны магнитного поля действует момент сил. Этот момент достигает максимального значения M_{\max} , когда контур повернут на 90° от равновесного положения, занимаемого им при отсутствии магнитного поля. В этом случае

$$B = \frac{M_{\max}}{IS} \quad (10.2)$$

где S – площадь контура.

За направление вектора магнитной индукции принимается направление от южного полюса S к северному N магнитной стрелки, свободно устанавливающейся в магнитном поле.

10.3. Линии магнитной индукции

Линиями магнитной индукции называют линии, касательные к которым направлены так же, как и вектор \vec{B} в данной точке поля. Как и силовые линии электрического поля, линии магнитной индукции проводят так, чтобы их густота была пропорциональна модулю вектора магнитной индукции. У линий магнитной индукции есть важное отличие от силовых линий электростатического поля: линии магнитной индукции замкнуты. Это свидетельствует о том, что у магнитного поля нет особых источников – магнитных зарядов. Магнитное поле является вихревым. В нем в отличие от потенциального поля (например, электростатического или поля тяжести Земли) работа при перемещении по замкнутой траектории не равна нулю и зависит от формы траектории.

10.4. Магнитное поле прямого тока

Если магнитное поле создано током I , протекающим по прямому бесконечному проводу, то модуль вектора магнитной индукции вычисляют по формуле:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (10.3)$$

где r – расстояние от провода до точки поля,

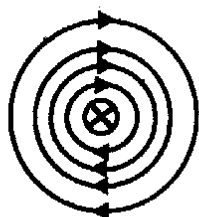


Рис. 10.1

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Н/А}^2 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$ – магнитная постоянная.

Направление вектора магнитной индукции определяют с помощью правила буравчика, которое в этом случае звучит следующим образом: если направление поступательного движения буравчика совпадает с направлением тока в проводнике, то направление вращения ручки буравчика совпадает с направлением вектора магнитной индукции.

Линии магнитной индукции прямого проводника с током представляют собой окружности, лежащие в плоскостях, перпендикулярных проводнику, причем их центры находятся на оси проводника. На рис. 10.1 показаны линии магнитной индукции поля, созданного током, текущим от нас, а на рис. 10.2 – током, текущим к нам.



Рис. 10.2

10.5. Магнитное поле в центре кругового тока

Если магнитное поле создано током, протекающим по замкнутому контуру, то направление вектора \vec{B} в этом случае совпадает с направлением перемещения буравчика при условии, что направление его вращения и ток в контуре совпадают. При этом говорят, что движение буравчика задает направление положительной нормали к контуру с током. В частности, в центре кругового витка радиусом R , по которому протекает ток

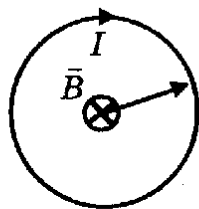


Рис. 10.3

I , индукция магнитного поля

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} \quad (10.4)$$

Причем для тока, протекающего по витку по часовой стрелке, вектор \vec{B} в центре витка направлен от нас (рис. 10.3).

10.6. Магнитное поле соленоида

Особый интерес представляет магнитное поле катушки с током, называемой соленоидом. Если длина соленоида много больше его диаметра, то магнитное поле внутри соленоида является однородным, т.е. одинаковым по модулю и направлению во всех точках. Линии магнитной индукции такого поля парал-

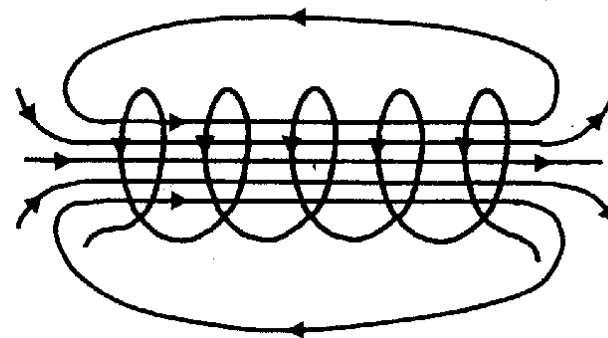


Рис. 10.4

лельны. Картина линий магнитной индукции соленоида приведена на рис. 10.4.

Внутри соленоида индукция магнитного поля

$$B = \mu_0 I \frac{N}{l} \quad (10.5)$$

где I – сила тока, N – число витков, l – длина соленоида.

10.7. Принцип суперпозиции магнитных полей.

Закон Био-Савара-Лапласа

Для магнитных полей справедлив принцип суперпозиции: в каждой точке поля вектор магнитной индукции \vec{B} результи-

рующего поля равен сумме векторов \vec{B}_i полей, создаваемых каждым током в отдельности:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \dots + \vec{B}_n \quad (10.6)$$

Все приведенные ранее результаты, связанные с вычислением магнитных полей, можно получить, используя закон Био-Савара-Лапласа. Согласно этому закону элемент провода Δl , по которому течет ток I (рис. 10.5), создает в некоторой точке A магнитное поле, индукция которого

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \Delta l \sin \alpha}{r^2} \quad (10.7)$$

где r – расстояние от элемента провода до точки A , α – угол между направлением на точку и направлением элемента. При этом вектор $\Delta \vec{B}$ перпендикулярен к плоскости P , содержащей

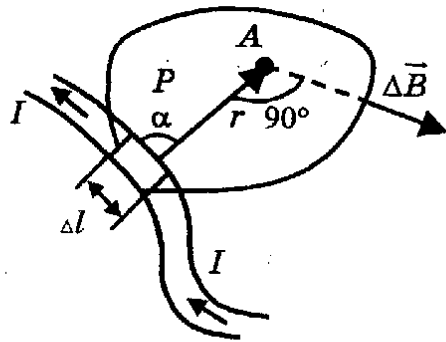


Рис. 10.5

элемент провода Δl и прямую, проведенную в точку A . Направление вектора $\Delta \vec{B}$ определяется правилом буравчика.

Чтобы найти полную индукцию \vec{B} , надо сложить вектора $\Delta \vec{B}$, создаваемые каждым элементом провода в рассматриваемой точке.

Из приведенных ранее примеров видно, что модуль вектора магнитной индукции пропорционален току, создающему это магнитное поле:

$$B \sim I$$

10.8. Сила Ампера

Магнитное поле действует на проводник с током с силой, которую называют силой Ампера. Если длина прямолинейного проводника – l , ток в проводнике – I , индукция магнитного

поля \vec{B} составляет угол α с проводником, то на проводник действует сила Ампера:

$$F_A = BIl \sin \alpha \quad (10.8)$$

Направление силы Ампера определяется по правилу левой

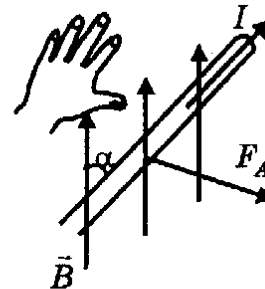


Рис. 10.6

руки: расположим левую руку так, чтобы линии магнитной индукции (их составляющие, перпендикулярные проводнику) входили в ладонь, а четыре вытянутых пальца показывали направление тока, тогда отогнутый на 90° большой палец укажет направление силы Ампера.

Сила Ампера перпендикулярна плоскости, проходящей через проводник и вектор магнитной индукции (рис. 10.6).

Сила Ампера обращается в ноль, когда вектор магнитной индукции \vec{B} параллелен проводнику с током. Сила Ампера максимальна и равна BIl , когда вектор \vec{B} перпендикулярен проводнику.

10.9. Сила Лоренца

Магнитное поле действует на движущийся заряд с силой, которую называют силой Лоренца. Если q – величина заряда, \vec{v} – его скорость, \vec{B} – индукция магнитного поля, образующего с вектором скорости угол α , то на заряд действует сила Лоренца

$$F_L = |q|vB \sin \alpha \quad (10.9)$$

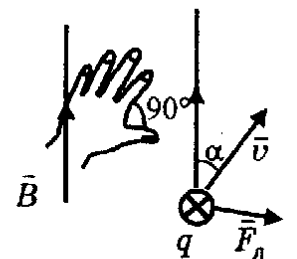


Рис. 10.7

Направление силы Лоренца определяется по правилу левой руки: расположим левую руку так, чтобы линии магнитной индукции (их составляющие, перпендикулярные скорости) входили в ладонь, а четыре вытянутых пальца были направлены по вектору скорости, если заряд положительный,

и против вектора скорости, если заряд отрицательный, тогда отогнутый на 90° большой палец укажет направление силы Лоренца.

Сила Лоренца перпендикулярна плоскости, проходящей через векторы \vec{v} и \vec{B} , т.е. $\vec{F}_L \perp \vec{v}$ и $\vec{F}_L \perp \vec{B}$ (рис. 10.7).

Сила Лоренца обращается в ноль, когда вектор магнитной индукции \vec{B} параллелен вектору скорости заряда. Сила Лоренца максимальна и равна qvB , когда $\vec{B} \perp \vec{v}$.

10.10. Магнитные свойства вещества

Опыт показывает, что все вещества, помещенные в магнитное поле, намагничиваются, т.е. сами создают магнитное поле. Поэтому магнитное поле в веществе отличается от магнитного поля в вакууме. Отношение модуля вектора магнитной индукции в среде B' к модулю вектора магнитной индукции в вакууме B называется магнитной проницаемостью среды:

$$\mu = \frac{B'}{B} \quad (10.10)$$

У веществ, называемых диамагнитными, магнитная проницаемость незначительно меньше единицы. Диамагнитными веществами являются: висмут, азот, вода, медь, золото. У висмута $\mu = 0,999$.

У веществ, называемых парамагнитными, магнитная проницаемость незначительно больше единицы. Парамагнитными веществами являются: кислород, платина, палладий, алюминий. У алюминия $\mu = 1,000023$.

У веществ, называемых ферромагнитными, магнитная проницаемость значительно больше единицы. Ферромагнитными веществами являются: железо, никель, кобальт и различные сплавы. У стали $\mu = 8000$. Для каждого ферромагнитного вещества существует определенная температура, выше которой его ферромагнитные свойства исчезают и вещество становится парамагнитным. Эта температура называется температурой Кюри.

Магнитные свойства вещества объясняются тем, что внутри молекул и атомов циркулируют элементарные электрические токи (гипотеза Ампера). Эти токи образуются вследствие движе-

ния электронов в атомах. Плоскости этих токов расположены, как правило, беспорядочно, поэтому большинство веществ в обычном состоянии магнитных свойств не проявляют. При внесении вещества в магнитное поле элементарные токи ориентируются так, что их действия складываются, и вещество проявляет магнитные свойства.

10.11. Магнитный поток

Магнитным потоком (потоком магнитной индукции) Φ через плоскую поверхность площадью S , помещенную в однородное магнитное поле, называется величина

$$\Phi = BS \cos \alpha \quad (10.11)$$

где B – модуль вектора магнитной индукции, α – угол между вектором \vec{B} и вектором нормали \vec{n} к поверхности (рис. 10.8).

Если поверхность не является плоской, то можно доказать, что магнитный поток через нее равен магнитному потоку через плоскую поверхность, на которую неплоская поверхность опирается (рис. 10.9).

Когда магнитное поле создается несколькими источниками, то из принципа суперпозиции следует, что результирующий магнитный поток

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_n, \quad (10.12)$$

где Φ_i – магнитный поток, создаваемый каждым источником.

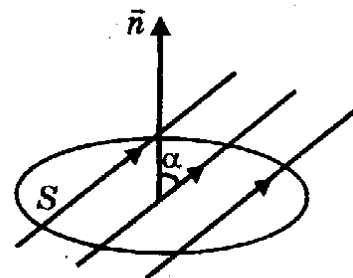


Рис. 10.8

Если в каком-либо замкнутом контуре протекает ток I , то он создает магнитное поле, индукция которого пропорциональна току ($B \sim I$). При этом магнитное поле создает магнитный поток через площадь, ограниченную контуром. Этот магнитный поток называют собственным магнитным потоком Φ_c . Его величина пропорциональна индукции B , а значит, и току I , протекающему в контуре, т.е.

$$\Phi_c = LI \quad (10.13)$$

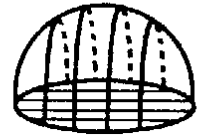


Рис. 10.9

Коэффициент пропорциональности L в этом равенстве называют индуктивностью контура. Индуктивность зависит от геометрических размеров и формы контура, а также магнитных свойств среды, в которой находится контур.

Проиллюстрируем сказанное, вычислив индуктивность соленоида, у которого N витков. Пусть по соленоиду протекает ток I , который внутри его создает однородное магнитное поле с индукцией $B = \mu_0 I \frac{N}{l}$ (см. формулу (10.5)).

Магнитный поток через один виток соленоида площадью S $\Phi_0 = BS \cos 0^\circ = BS$ ($\alpha = 0^\circ$, так как вектор \vec{B} перпендикулярен плоскости витка). Собственный магнитный поток через соленоид

Магнитный поток через один виток соленоида площадью S $\Phi_0 = BS \cos 0^\circ = BS$ ($\alpha = 0^\circ$, так как вектор \vec{B} перпендикулярен плоскости витка). Собственный магнитный поток через соленоид

$$\Phi_c = \Phi_0 N = BSN = \mu_0 I \frac{N}{l} SN = \left(\mu_0 \frac{N^2}{l} S \right) I.$$

Таким образом, индуктивность соленоида

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l} S \quad (10.14)$$

Пусть произвольный контур находится во внешнем магнитном поле. Полный магнитный поток Φ , пронизывающий контур, состоит из потока внешнего поля $\Phi_{\text{вн}}$ и собственного магнитного потока Φ_c .

$$\Phi = \Phi_{\text{вн}} + \Phi_c \quad (10.15)$$

10.12. Закон электромагнитной индукции

Опытным путем было установлено явление электромагнитной индукции, состоящее в том, что при всяком изменении магнитного потока, пронизывающего контур, образованный замкнутым проводником, в проводнике возникает индукционный ток, существующий в течение всего времени изменения магнитного потока.

Правило Ленца позволяет установить направление индукционного тока: индукционный ток в контуре направлен так, что его магнитное поле противодействует изменению магнитного потока, пронизывающего этот контур.

В более общем виде правило Ленца формулируется так: индукционный ток всегда противодействует причине, вызвавшей его.

Закон электромагнитной индукции утверждает: при изменении магнитного потока в контуре возникает электродвижущая сила индукции, равная скорости изменения магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную этим контуром, а вызываемый ею ток противодействует изменению магнитного потока, пронизывающего контур:

$$\mathcal{E}_i = -\Phi'(t) \quad (10.16)$$

где \mathcal{E}_i – электродвижущая сила индукции, $\Phi'(t)$ – производная от магнитного потока по времени, которая и является скоростью изменения магнитного потока.

В случае, когда магнитный поток изменяется равномерно во времени, производную можно заменить отношением $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, где

$\Delta\Phi$ – изменение магнитного потока за время Δt . Причем изменение $\Delta\Phi$ равно разности между конечным Φ_2 и начальным Φ_1 значениями магнитного потока, т.е. $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$. Тогда

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \quad (10.17)$$

10.13. Электродвижущая сила самоиндукции

Согласно формуле (10.15) магнитный поток $\Phi = \Phi_{\text{вн}} + \Phi_c$, подставляя в формулу (10.16), получим, что

$$\mathcal{E}_i = -\Phi'_{\text{вн}} - \Phi'_c \quad (10.18)$$

В ряде случаев собственный магнитный поток можно не учитывать (при $L \rightarrow 0$), и тогда ЭДС индукции определяется только скоростью изменения внешнего магнитного потока:

$$\mathcal{E}_i = -\Phi'_{\text{вн}}.$$

В тех случаях, когда внешнее магнитное поле отсутствует, в контуре возникает ЭДС индукции только за счет изменения собственного магнитного потока. Ее называют ЭДС самоиндукции \mathcal{E}_c . Из формулы (10.16) получаем, что $\mathcal{E}_c = -\dot{\Phi}_c$. Так как $\Phi_c = LI$, то $\mathcal{E}_c = -(LI)'$. В большинстве задач индуктивность контура $L = \text{const}$, поэтому

$$\mathcal{E}_c = -LI'(t) \quad (10.19)$$

где $I'(t)$ – производная от тока в контуре по времени, которую называют скоростью изменения силы тока.

В случае, когда ток изменяется равномерно во времени, ЭДС самоиндукции

$$\mathcal{E}_c = -L \frac{\Delta I}{\Delta t} \quad (10.20)$$

где ΔI – изменение тока за время Δt , равное разности между конечным и начальным значениями тока.

Когда зависимость потока и тока от времени неизвестны, но изменение их во времени неравномерное, формулы (10.17) и (10.20) выражают средние значения ЭДС индукции и самоиндукции.

10.14. Вихревое электрическое поле. ЭДС индукции в движущихся проводниках. Энергия магнитного поля тока

Причиной возникновения ЭДС индукции в неподвижном контуре является фундаментальный закон природы: переменное во времени магнитное поле порождает вихревое электрическое поле. Линии напряженности такого поля замкнуты. Работа вихревого электрического поля при перемещении заряда q по замкнутому контуру не равна нулю, а ее отношение к величине этого заряда есть ЭДС индукции

$$\mathcal{E}_i = \frac{A}{q} \quad (10.21)$$

ЭДС индукции возникает и в движущихся в магнитном поле проводниках. Рассмотрим прямолинейный проводник длиной l , который перемещается в магнитном поле с индукцией \vec{B} со

скоростью \vec{v} , причем угол между векторами \vec{B} и \vec{v} равен α . Сам проводник образует с перпендикуляром CD к плоскости векторов \vec{v} и \vec{B} угол β (рис. 10.10).

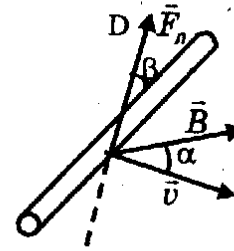


Рис. 10.10

На каждый свободный электрон внутри проводника действует сила Лоренца \vec{F}_L , направленная вдоль CD и равная $F_L = |e|vB \sin \alpha$, где $|e|$ – модуль заряда электрона. Работа этой силы при перемещении электрона с одного конца проводника на другой

$$A = F_L \cdot l \cos \beta = |e|vB \sin \alpha \cdot l \cos \beta = |e|vBl \sin \alpha \cos \beta.$$

ЭДС индукции здесь возникает из-за действия силы Лоренца и равна

$$\mathcal{E}_i = \frac{A}{|e|} = Bvl \sin \alpha \cos \beta.$$

Когда проводник перпендикулярен плоскости векторов \vec{B} и \vec{v} , $\beta = 0$, тогда

$$\mathcal{E}_i = Bvl \sin \alpha \quad (10.22)$$

Если по контуру с индуктивностью L протекает ток силой I , то созданное им магнитное поле обладает энергией

$$W_m = \frac{LI^2}{2} \quad (10.23)$$

10.15. Примеры решения задач

Задача 10.1. Прямолинейный однородный проводник, подвешенный на двух гибких проволочках одинаковой длины, может вращаться вокруг горизонтальной оси AC . Проводник находится в однородном вертикальном магнитном поле. Если по проводнику течет ток $I_1 = 1$ А, проволочки отклоняются от вертикали на угол $\alpha_1 = 30^\circ$. При какой силе тока они будут отклоняться на угол $\alpha_2 = 60^\circ$? Массой проволочек можно пренебречь (рис. 10.11).

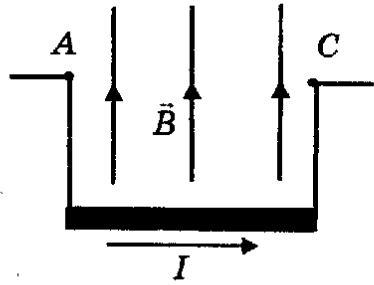


Рис. 10.11

масса проводника), равнодействующая сил натяжения проволочек \vec{T} , сила Ампера \vec{F}_A , направленная горизонтально. Условия равновесия проводника, записанные для горизонтальной и вертикальной осей X и Y , дают систему уравнений:

$$\begin{cases} \text{по оси } X & F_A - T \sin \alpha = 0 \\ \text{по оси } Y & T \cos \alpha - mg = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T \sin \alpha = F_A \\ T \cos \alpha = mg \end{cases} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{F_A}{mg}$$

В рассматриваемой задаче проводник перпендикулярен магнитному полю, поэтому $F_A = BIl \sin 90^\circ = BIl$.

Итак, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{BIl}{mg}$. При токе I_1 $\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{BI_1 l}{mg}$; при токе I_2

$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{BI_2 l}{mg}$. Отношение тангенсов равно

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{I_2}{I_1} \Rightarrow I_2 = I_1 \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = 3 \text{ А.}$$

Задача 10.2. Вдоль наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол $\alpha = 30^\circ$, проложены рельсы, по которым может скользить проводящий стержень массой $m = 1$ кг. Какой минимальной величины ток нужно пропустить через стержень, чтобы он оставался в покое, если вся система находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,2$ Тл и направленной верти-

Решение.

Предположим, что ток протекает, как показано на рис. 10.11. Вид сбоку представлен на рис. 10.12. На проводник действуют силы: сила тяжести $m\vec{g}$ (m —

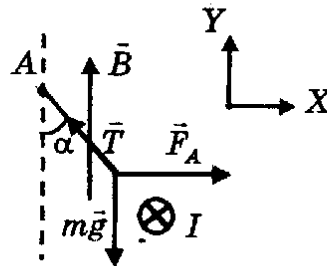


Рис. 10.12

кально вверх? Коэффициент трения стержня о рельсы $\mu = 0,2$, расстояние между рельсами $l = 0,5$ м. Магнитным полем Земли пренебречь.

Решение.

Первый случай. Ток через стержень направлен от нас (рис. 10.13).

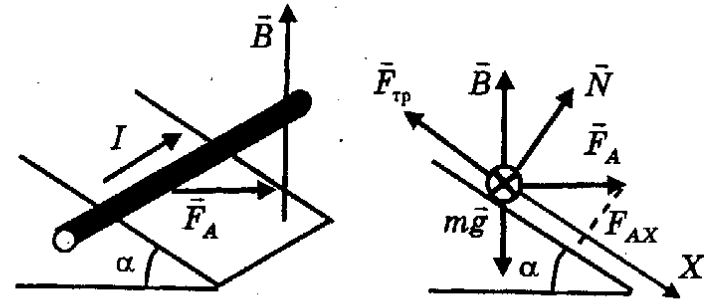


Рис. 10.13

На стержень действуют: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции \vec{N} , сила трения покоя $\vec{F}_{\text{тр}}$ и сила Ампера \vec{F}_A . Плоскость, в которой расположены стержень и вектор \vec{B} , — вертикальная и проходит через стержень. Поэтому сила Ампера направлена горизонтально как показано на рис. 10.13. Представим, что магнитного поля нет. Выясним, что будет происходить со стержнем. Для этого надо сравнить $\operatorname{tg} \alpha$ и μ :

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 30^\circ \approx 0,58 > \mu = 0,2.$$

Таким образом, стержень должен соскальзывать вниз. Сила

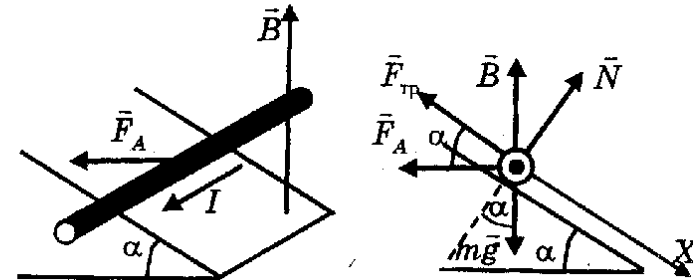


Рис. 10.14

Ампера, действующая как показано на рис. 10.13, имеет проекцию F_{AX} , которая и заставит стержень соскальзывать. Итак, в первом случае не существует тока, при котором стержень покоится.

Второй случай. Ток через стержень направлен к нам. (Рис. 10.14).

Во втором случае на стержень действуют те же силы, но сила Ампера изменила свое направление. Проецируя силы на ось Y , получим

$$N - mg \cos \alpha - F_A \sin \alpha = 0 \Rightarrow N = mg \cos \alpha + F_A \sin \alpha.$$

Так как стержень покоится, то, проецируя на ось X , получим $mg \sin \alpha - F_A \cos \alpha - F_{тр} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow F_{тр} = mg \sin \alpha - F_A \cos \alpha.$$

$F_{тр}$ — сила трения покоя (по условию стержень покоится), поэтому

$$F_{тр} \leq \mu N \Rightarrow mg \sin \alpha - F_A \cos \alpha \leq \mu (mg \cos \alpha + F_A \sin \alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow mg (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \leq F_A (\cos \alpha + \mu \sin \alpha).$$

Подставляя $F_A = BI l$ (угол между вектором \vec{B} и направлением тока I равен 90°), получаем

$$I \geq mg \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{Bl (\cos \alpha + \mu \sin \alpha)}.$$

Минимальное значение тока, при котором стержень покоится:

$$I_{\min} = \frac{mg}{Bl} \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} = \frac{mg}{Bl} \frac{\operatorname{tg} \alpha - \mu}{\mu \operatorname{tg} \alpha + 1} = 33,2 \text{ А.}$$

Задача 10. В однородном магнитном поле с индукцией \vec{B} частице массой m и зарядом q сообщают скорость \vec{v} , направленную перпендикулярно линиям магнитной индукции. Как будет двигаться эта частица в магнитном поле (рис. 10.15)?

Решение.

Будем для определенности считать, что вектор магнитной индукции \vec{B} перпендикулярен плоскости чертежа и направлен от нас, а частица заряжена положительно. В магнитном поле на

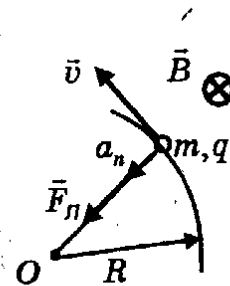


Рис. 10.15

частицу действует сила Лоренца \vec{F}_L , направленная все время перпендикулярно скорости. По этой причине она работу не совершает и кинетическая энергия частиц не изменяется, а значит, не изменяется и модуль скорости. Оставаясь постоянной по модулю, сила Лоренца сообщает частице постоянное по модулю ускорение, направленное перпендикулярно скорости. Вывод: частица движется по окружности. Записав второй закон Ньютона в

проекции на радиус, получим $F_L = m \cdot a_n$, где $a_n = \frac{v^2}{R}$ — центростремительное ускорение, а $F_L = qvB$. Итак, $qvB = m \frac{v^2}{R}$.

Радиус окружности, по которой движется частица, $R = \frac{mv}{qB}$.

Период обращения частицы по окружности:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi}{v} \left(\frac{mv}{qB} \right) = \frac{2\pi m}{qB}.$$

Период обращения не зависит от скорости движения частицы.

Задача 10.4. Частица массой $m = 6,65 \cdot 10^{-27}$ кг и зарядом $q = 3,2 \cdot 10^{-19}$ Кл сначала ускоряется в электростатическом поле, проходя ускоряющую разность потенциалов $u = 2500$ В. Начальная скорость частицы равна нулю. Затем частица влетает в однородное магнитное поле с индукцией $B = 2 \cdot 10^{-5}$ Тл, перпендикулярное вектору скорости. Найти изменение импульса частицы за время $t = \frac{\pi}{2} \cdot 1,039 \cdot 10^{-3}$ с после влета в магнитное поле. Определить величину центростремительного и тангенциального ускорения частицы в этот и последующие моменты времени.

Решение.

Пусть в начальный момент времени заряженная частица находится в точке A электростатического поля, потенциал которой равен φ_A . Тогда энергия частицы – потенциальная энергия в электростатическом поле $W_A = W_{pA} = q\varphi_A$. В точке B энергия частицы состоит из потенциальной $W_{pB} = q\varphi_B$ и кинетической $W_{kB} = \frac{mv^2}{2}$, т.е. $W_B = q\varphi_B + \frac{mv^2}{2}$. По закону

$$\text{сохранения энергии } W_A = W_B \Rightarrow q\varphi_A = q\varphi_B + \frac{mv^2}{2} \Rightarrow q(\varphi_A - \varphi_B) = \frac{mv^2}{2}.$$

Но $\varphi_A - \varphi_B = u \Rightarrow qu = \frac{mv^2}{2}$, и скорость частицы при ее влете в магнитное поле $v = \sqrt{\frac{2qu}{m}} = 4,9 \cdot 10^5$ м/с. В магнитном поле

частица под действием силы Лоренца движется по окружности с постоянной по модулю скоростью v (рис. 10.15). По второму закону Ньютона $F_{\Pi} = m \cdot a_n$, где сила Лоренца $F_{\Pi} = qvB$, а центростремительное ускорение частицы $a_n = \frac{v^2}{R}$. После под-

становки получаем $qvB = m \frac{v^2}{R}$, откуда радиус окружности

$$R = \frac{mv}{qB} = 510 \text{ м. Период обращения частицы по окружности}$$

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB} = 2\pi \cdot 1,039 \cdot 10^{-3} \text{ с.}$$

Отношение времени движения t к периоду

$\frac{t}{T} = \left(\frac{\pi}{2} \cdot 1,039 \cdot 10^{-3} \right) / \left(2\pi \cdot 1,039 \cdot 10^{-3} \right) = \frac{1}{4} \Rightarrow t = \frac{1}{4} T$, т.е. за указанное время частица проходит $1/4$ окружности, а ее вектор скорости поворачивается на 90° (рис. 10.16).

Изменение импульса $\Delta \vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \vec{p}_2 + (-\vec{p}_1)$, где $p_1 = p_2 = mv$.

Модуль вектора $\Delta p = \sqrt{2} p_1 = \sqrt{2} p_2 = 4,6 \cdot 10^{21}$ кгм/с. Модуль

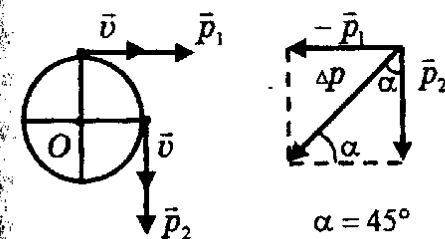


Рис. 10.16

центростремительного ускорения в любой точке окружности

$$a_n = \frac{v^2}{R} = 4,7 \cdot 10^8 \text{ м/с}^2.$$

Так как сила Лоренца, действующая на частицу, направлена по радиусу окружности к центру, то тан-

генциальное ускорение в любой точке $a_t = 0$.

Задача 10.5. В однородное магнитное поле с индукцией \vec{B} влетает со скоростью \vec{v} частица массой m и зарядом q . Угол между векторами скорости \vec{v} и магнитной индукции \vec{B} равен α . Как будет двигаться частица в магнитном поле (рис. 10.17)?

Решение.

Будем для определенности считать заряд частицы положи-

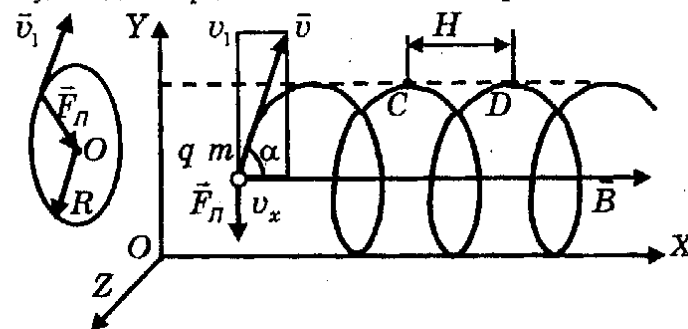


Рис. 10.17

тельными. Введем систему координат, ось X которой направлена вдоль поля, а плоскость YOZ перпендикулярна полю. Так как скорость \vec{v} перпендикулярна силе Лоренца \vec{F}_L , действующей на частицу, то сила Лоренца работы не совершает и, следовательно, скорость остается постоянной по модулю. Так как $\vec{F}_L \perp \vec{v}$, то $\vec{F}_L \perp OX$. Проекция силы Лоренца на ось OX равна нулю, значит, в направлении поля у частицы нет ускорения, и она движется равномерно прямолинейно со скоростью $v_x = v \cos \alpha$. Так как $v_x = \text{const}$ и $v = \text{const}$, то угол α между векторами \vec{v} и \vec{B} будет оставаться постоянным. Поэтому и сила Лоренца $F_L = qvB \sin \alpha$ будет постоянной по модулю, причем вектор \vec{F}_L параллелен плоскости YOZ . Перпендикулярная вектору \vec{B} , проекция скорости $v_1 = v \sin \alpha$ находится в плоскости, параллельной плоскости YOZ . Следовательно, в плоскости, перпендикулярной вектору \vec{B} , частица движется по окружности, радиус которой можно найти из второго закона Ньютона:

$$F_L = ma_n \Rightarrow qvB \sin \alpha = m \frac{v_1^2}{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow qvB \sin \alpha = m \frac{(v \sin \alpha)^2}{R} \Rightarrow R = \frac{mv \sin \alpha}{qB}$$

Итак, в направлении поля частица движется прямолинейно равномерно со скоростью $v_x = v \cos \alpha$, а в плоскости, перпендикулярной полю, она описывает окружность радиусом

$$R = \frac{mv \sin \alpha}{qB}$$

В итоге получаем сложное движение по винтовой линии.

Шаг винтовой линии H – это расстояние, на которое смещается частица в направлении поля за время одного оборота T по окружности, т.е. расстояние между точками C и D (рис. 10.17).

$$H = v_x T, \text{ где } T = \frac{2\pi R}{v_1} = \frac{2\pi(mv \sin \alpha / qB)}{v \sin \alpha} = 2\pi \frac{m}{qB}$$

$$H = v \cos \alpha \cdot 2\pi \frac{m}{qB} = \frac{2\pi m v \cos \alpha}{qB}$$

Задача 10.6. Электрон влетает в область пространства с однородным электростатическим полем с напряженностью $E = 6 \cdot 10^4$ В/м перпендикулярно линиям напряженности (рис. 10.18). Определить величину и направление индукции магнитного поля, которое надо создать в этой области для того, чтобы электрон пролетел ее, не испытывая отклонений. Энергия электрона $W = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Дж.

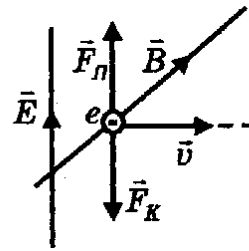


Рис. 10.18

Решение.

Энергия электрона $W = \frac{m_e v^2}{2}$,

где $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг – масса электрона, v – его скорость. Следовательно,

$$v = \sqrt{\frac{2W}{m_e}}$$

Электростатическое поле

действует на электрон с силой $F_K = |e|E$, где $|e|$ – модуль заряда электрона. Для того, чтобы электрон не испытывал отклонений, необходимо скомпенсировать эту силу силой Лоренца \vec{F}_L , действующей со стороны магнитного поля. Так как

$$F_K = F_L \Rightarrow |e|E = |e|vB \Rightarrow B = \frac{E}{v} = E \sqrt{\frac{m_e}{2W}} = 0,1 \text{ Тл.}$$

Вектор $\vec{B} \perp \vec{v}$ и $\vec{B} \perp \vec{E}$ (рис. 10.18).

Задача 10.7. По металлической ленте толщиной h течет ток I . Лента помещена в однородное магнитное поле с индукцией B , направленной перпендикулярно поверхности ленты (рис. 10.19). Определить разность потенциалов между точками A и C ленты, если концентрация свободных электронов в металле равна n .

Решение.

В металле электрический ток – это направленное движение свободных электронов, причем $I = |e|nSv$ (1), где $|e|$ – модуль

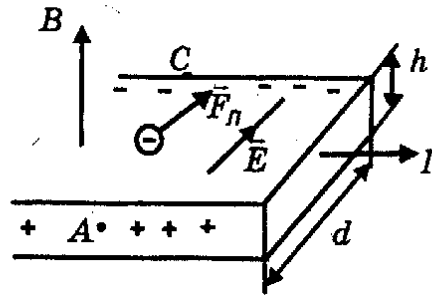


Рис. 10.19

заряда электрона, v – скорость упорядоченного движения электронов, $S = dh$ – площадь поперечного сечения ленты (d – ее ширина). Магнитное поле действует на свободные электроны с силой Лоренца, направленной перпендикулярно току в ленте, как показано на рисунке.

Поскольку на одной из поверхностей ленты образуется избыток электронов, между торцами ленты возникнет электрическое поле \vec{E} , следовательно, между точками A и C будет существовать разность потенциалов. Перемещение электронов будет продолжаться до тех пор, пока сила Лоренца не будет уравновешена силой со стороны электрического поля, т.е. $F_K = F_L \Rightarrow |e|E = |e|vB \Rightarrow E = vB$ (*).

Скорость электронов выражаем из уравнения (1):

$$v = \frac{I}{|e|nS}. \text{ Напряженность поля связана с разностью потенциа-}$$

лов соотношением $E = \frac{\varphi_A - \varphi_C}{d}$. Подставляя в равенство (*),

получаем

$$\frac{\varphi_A - \varphi_C}{d} = \frac{IB}{|e|ndh} \Rightarrow \varphi_A - \varphi_C = \frac{IB}{|e|nh}$$

Задача 10.8. Незаряженный металлический цилиндр вращается вокруг своей оси в магнитном поле с угловой скоростью ω . Индукция магнитного поля направлена вдоль оси цилиндра. Каково должно быть значение индукции магнитного поля, чтобы в

цилиндре не возникло электрическое поле? Масса электрона – m_e и его заряд – e .

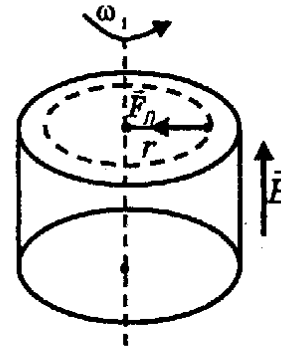


Рис. 10.20

Решение.

Предположим, что цилиндр вращается против часовой стрелки, как показано на рис. 10.20. Электрическое поле внутри цилиндра не возникает, если отсутствует смещение свободных электронов. Это соответствует тому, что каждый свободный электрон движется по окружности с угловой скоростью ω . Линейная скорость электрона $v = \omega r$, где r – расстояние электрона до оси вращения. Следова-

тельно, на каждый электрон действует сила Лоренца $F_L = |e|vB$, которая сообщает ему центростремительное ускорение $a_n = \omega^2 r$, достаточное для движения по окружности радиусом r . Для того, чтобы сила Лоренца была направлена к оси вращения, необходимо, чтобы индукция магнитного поля \vec{B} была направлена вверх, если цилиндр вращается против часовой стрелки, и вниз, если цилиндр вращается по часовой стрелке.

По второму закону Ньютона $F_L = ma_n \Rightarrow |e|vB = m_e \omega^2 r$.

Подставляя $v = \omega r$, находим, что $B = \frac{m_e \omega}{|e|}$.

Задача 10.9. Круговой виток радиусом R , по которому протекает ток I_2 , находится вблизи бесконечного прямого про-

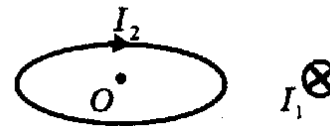


Рис. 10.21

воду, по которому протекает ток I_1 . Проводник и виток лежат в одной плоскости. Расстояние от провода до центра витка равно $3R$. Определить индукцию магнитного поля в центре витка (рис. 10.21).

Решение.

Согласно принципу суперпозиции, индукция магнитного поля в любой точке $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$, где \vec{B}_1 – индукция магнитного поля, создаваемого током, протекающим по проводу, а \vec{B}_2 – индукция магнитного поля, создаваемого потоком, протекающим по витку. В центре витка прямой провод создает индукцию $B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi \cdot 3R} = \frac{\mu_0 I_1}{6\pi R}$; в центре круго-

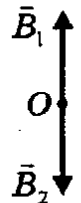


Рис. 10.22

вого тока $B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2R}$. \vec{B}_1 и \vec{B}_2 направлены как

показано на рис. 10.22.

Модуль вектора магнитной индукции результирующего поля $B = |B_1 - B_2| = \left| \frac{\mu_0 I_1}{6\pi R} - \frac{\mu_0 I_2}{2R} \right| = \frac{\mu_0}{2R} \left| \frac{I_1}{3\pi} - I_2 \right|$.

Если $\frac{I_1}{3\pi} > I_2$, то вектор \vec{B} направлен так же, как вектор \vec{B}_1 .

Если $\frac{I_1}{3\pi} < I_2$, то вектор \vec{B} направлен так же, как вектор \vec{B}_2 .

Если $\frac{I_1}{3\pi} = I_2$, индукция магнитного поля в центре витка равна нулю.

Задача 10.10. Через соленоид, индуктивность которого $L = 0,4$ мГн и площадь поперечного сечения $S = 10$ см², проходит ток силой $I = 0,5$ А. Какова индукция магнитного поля внутри соленоида, если он содержит $N = 100$ витков?

Решение.

Пусть угол между нормалью к плоскости витка соленоида и вектором магнитной индукции \vec{B} равен 0° . Поток магнитной индукции через один виток равен $BS \cos 0^\circ = BS$. Тогда маг-

нитный поток через соленоид $\Phi = BSN$. С другой стороны, магнитный поток $\Phi = LI$, поэтому

$$BSN = LI \Rightarrow B = \frac{LI}{SN} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Тл.}$$

Задача 10.11. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,1$ Тл расположен плоский проволочный виток, площадь которого $S = 10^{-2}$ м², а сопротивление $R = 2$ Ом. Первоначально плоскость витка перпендикулярна линиям магнитной индукции. Виток замкнут на гальванометр. Полный заряд, протекший через гальванометр при повороте витка $q = 7,5 \cdot 10^{-4}$ Кл. На какой угол повернули виток?

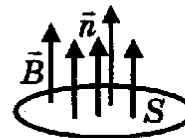


Рис. 10.23

Решение.

Пусть нормаль \vec{n} к плоскости витка совпадает по направлению с вектором магнитной индукции \vec{B} (рис. 10.23). Начальный магнитный поток через площадь, ограниченную витком, $\Phi_1 = BS \cos 0^\circ = BS$. При повороте плоскости витка на угол α нормаль, связанная с витком, также поворачивается на угол α , поэтому магнитный поток становится равным $\Phi_2 = BS \cos \alpha$. Так как магнитный поток изменился, то в витке возникла ЭДС индукции. Однако, закон изменения магнитного потока во времени не задан. Нельзя утверждать также, что поток изменялся равномерно во времени. Поэтому для вычисления ЭДС индукции воспользуемся формулой $\mathcal{E}_i = -\Phi'(t)$. По витку протекает ин-

дукционный ток $i(t) = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = -\frac{\Phi'(t)}{R}$. Заряд, протекающий по

витку и регистрируемый гальванометром, $q = S_{ABCD} = \int_{t_1}^{t_2} i(t) dt$.

Здесь t_1 – начальный, а t_2 – конечный моменты времени. После подстановки $i(t)$ получим

$$q = \int_{t_1}^{t_2} -\frac{\Phi'(t)}{R} dt = -\frac{1}{R} \int_{t_1}^{t_2} \Phi'(t) dt = -\frac{1}{R} \Phi(t) \Big|_{t_1}^{t_2} =$$

$$= -\frac{1}{R} (\Phi(t_2) - \Phi(t_1)) = -\frac{1}{R} (\Phi_2 - \Phi_1) = -\frac{1}{R} \Delta\Phi.$$

Итак, независимо от того, как поворачивали виток, протекающий через замкнутый контур заряд вычисляется по формуле

$$q = -\frac{\Delta\Phi}{R} \quad (10.24)$$

Формула выведена в предположении, что индуктивность контура (витка) пренебрежимо мала ($L \rightarrow 0$). Эта формула будет использована при решении других задач, в которых выполняется указанное условие.

В нашей задаче

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = BS\cos\alpha - BS = BS(\cos\alpha - 1).$$

После подстановки в (10.24) находим

$$q = -\frac{BS(\cos\alpha - 1)}{R} \Rightarrow 1 - \cos\alpha = \frac{qR}{BS} \Rightarrow \cos\alpha = 1 - \frac{qR}{BS} = -0,5.$$

$$\text{Следовательно, } \alpha = \arccos(-0,5) = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ.$$

Задача 10.12. Квадратная рамка со стороной a помещается в однородное магнитное поле, перпендикулярное ее плоскости. При этом по рамке протекает заряд Q . Какой заряд протечет по

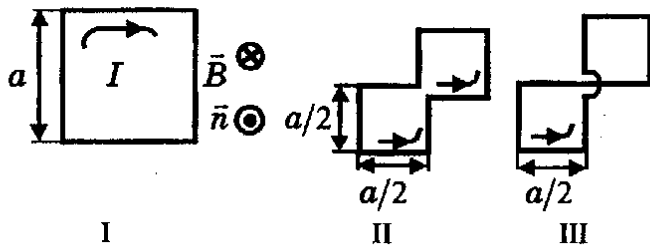


Рис. 10.24

рамке, если при неизменном поле ей придать форму двух равных квадратов (рис. 10.24)?

Решение.

Пусть магнитное поле \vec{B} направлено от нас. Выберем нормаль \vec{n} , направленную к нам из плоскости чертежа. По условию задачи вначале рамка находится вне магнитного поля, поэтому магнитный поток $\Phi_1 = 0$. Когда рамку поместили в магнитное поле, магнитный поток $\Phi_2 = BS\cos 180^\circ = -BS$, где $S = a^2$.

Воспользовавшись формулой (10.24), получим, что $Q = -\frac{\Delta\Phi}{R} \Rightarrow Q = -\frac{(-BS) - 0}{R} = \frac{BS}{R}$, где R — сопротивление контура.

Далее в магнитном поле контур I деформируется в контур II. Отметим, что площадь контура II становится равной

$$S_1 = 2 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}, \text{ т.е. уменьшается. Так как общая длина контуров I и II не изменилась, то сопротивление контура II остается равным сопротивлению контура I. Теперь начальный магнитный поток через контур I равен } BS\cos 180^\circ = -BS. \text{ Конечный магнитный поток (поток через контур II) равен } -BS_1. \text{ Изменение магнитного потока}$$

$$\Delta\Phi' = -BS_1 - (-BS) = BS - BS_1 = BS\left(1 - \frac{S_1}{S}\right).$$

Снова воспользовавшись формулой (10.24), найдем заряд, протекающий по контуру при его деформации в магнитном поле

$$Q' = -\frac{\Delta\Phi'}{R} = -\frac{BS}{R} \left(1 - \frac{S_1}{S}\right). \text{ Учитывая, что } \frac{BS}{R} = Q \text{ и}$$

$$\frac{S_1}{S} = \frac{1}{2}, \text{ получаем } Q' = -\frac{1}{2}Q. \text{ Минус указывает на то, что индукционный ток, переносящий заряд } Q', \text{ протекает в направлении, противоположном индукционному току, переносившему заряд } Q.$$

По условию задачи контур III получают из контура I посредством деформации его в два квадрата со стороной $\frac{a}{2}$ и площадью $S' = \left(\frac{a}{2}\right)^2$ каждый и последующего поворота плоскости

верхнего квадрата на 180° . Это значит, что нормаль к верхнему квадрату также поворачивается на 180° , и угол между ней и вектором \vec{B} равен нулю. В этом случае начальный магнитный поток (поток через контур I, расположенный в магнитном поле) равен $-BS$. Конечный магнитный поток (пронизывающий контур III) равен сумме потоков через верхний и нижний квадраты:

$$BS' \cos 180^\circ + BS' \cos 0^\circ = -BS' + BS' = 0.$$

Изменение магнитного потока в этом случае $\Delta\Phi' = 0 - (-BS) = BS$. Заряд, протекающий по контуру:

$$Q' = -\frac{\Delta\Phi'}{R} = -\frac{BS}{R} = -Q.$$

Задача 10.13. Проводящий плоский контур площадью $S = 200 \text{ см}^2$, в который включен конденсатор емкостью $C = 10,0 \text{ мкФ}$, расположен в однородном магнитном поле так, что вектор нормали к контуру образует с вектором магнитной индукции угол $\alpha = 60^\circ$. Изменение магнитной индукции во времени описывается уравнением $B = 2 \cdot 10^{-2} \cos \frac{\pi}{4} t$ Тл. Определить энергию конденсатора в момент времени $t = 2 \text{ с}$. Индуктивностью контура пренебречь.

Решение.

По определению магнитный поток, пронизывающий контур $\Phi(t) = B(t)S \cos \alpha$. Как видно, здесь изменение магнитного потока вызвано изменением магнитной индукции. ЭДС индукции в этом контуре

$$\mathcal{E}_i = -\Phi'(t) = -(B(t)S \cos \alpha)' = -B'(t)S \cos \alpha =$$

$$= -\left(2 \cdot 10^{-2} \cos \frac{\pi}{4} t\right)' S \cos \alpha = 2 \cdot 10^{-2} \left(\sin \frac{\pi}{4} t\right) \left(\frac{\pi}{4}\right) S \cos \alpha = \\ = \frac{1}{2} S \pi \cos \alpha \sin \frac{\pi}{4} t.$$

Поскольку в плоском конденсаторе расстояние между пластинами мало, то ЭДС индукции, возникшая в контуре и равномерно в нем распределенная, представляет собой напряжение на конденсаторе. Энергия конденсатора в любой момент времени

$$\text{равна } W = \frac{C \mathcal{E}_i^2}{2} = \frac{1}{8} C \left(S \pi \cos \alpha \sin \frac{\pi}{4} t\right)^2. \text{ В момент времени}$$

$$t = 2 \text{ с} \quad \sin \frac{\pi}{4} t = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \quad \text{и энергия конденсатора}$$

$$W = \frac{1}{8} C (S \pi \cos \alpha)^2 = 1,23 \cdot 10^{-9} \text{ Дж}$$

Задача 10.14. Проводник, имеющий форму параболы

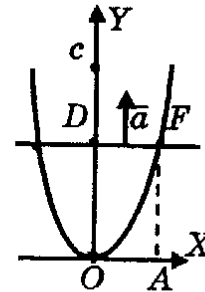


Рис. 10.25

$y = kx^2$, находится в однородном магнитном поле B , перпендикулярном плоскости XY . Из вершины параболы перемещают поступательно и без начальной скорости перемычку с постоянным ускорением a . Найти ЭДС индукции в образовавшемся контуре при значении координаты $y = c$ (рис.10.25).

Решение.

Магнитный поток через замкнутый контур, образованный перемычкой и параболой, $\Phi = BS$, где S – площадь этого контура. Выразим эту площадь как функцию координаты x , а следовательно, и времени t . Так как перемычка движется с постоянным ускорением, то ее координата $y(t) = \frac{at^2}{2}$. С другой сто-

роны, $y = kx^2$, следовательно, $\frac{at^2}{2} = kx^2 \Rightarrow x^2 = \frac{at^2}{2k}$, и для

$x \geq 0$ получаем, что $x = \sqrt{\frac{a}{2k}}t$ (*).

Площадь замкнутого контура в любой момент времени найдем как удвоенную разность между площадью прямоугольника $OAFD$ и площадью криволинейной трапеции OAF . Итак,

$$S(x) = 2 \left(xy - \int_0^x y(x) dx \right) = 2 \left(kx^3 - \int_0^x kx^2 dx \right) =$$

$$= 2 \left(kx^3 - \frac{kx^3}{3} \Big|_0^x \right) = \frac{4}{3} kx^3, \text{ где } x - \text{ мгновенное значение}$$

абсциссы точки пересечения перемычки и параболы. Учитывая,

что $x = \sqrt{\frac{a}{2k}}t$, получаем $S(t) = \frac{4}{3}k \left(\sqrt{\frac{a}{2k}}t \right)^3 = \frac{2}{3\sqrt{2k}} a^{3/2} t^3$.

Магнитный поток в зависимости от времени

$\Phi(t) = \frac{2}{3\sqrt{2k}} Ba^{3/2} t^3$. ЭДС индукции в контуре

$$\mathcal{E}_i = -\Phi'(t) = - \left(\frac{2}{3\sqrt{2k}} Ba^{3/2} t^3 \right)' = - \frac{2}{\sqrt{2k}} Ba^{3/2} t^2 =$$

$$= - \frac{4}{\sqrt{2k}} Ba^{1/2} \left(\frac{at^2}{2} \right) = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{k}} Ba^{1/2} y = -By \sqrt{\frac{8a}{k}}$$

В тот момент времени, когда $y = c$, модуль ЭДС индукции в

контуре $|\mathcal{E}_i| = Bc \sqrt{\frac{8a}{k}}$.

Задача 10.15. По двум медным шинам, установленным под углом α к горизонту, скользит под действием силы тяжести проводящая перемычка массой m и длиной l . Скольжение происходит в однородном магнитном поле с индукцией B . Поле

перпендикулярно плоскости перемещения перемычки. Вверху шины соединены резистором с сопротивлением R . Коэффициент трения скольжения между поверхностями шин и перемычки равен μ ($\mu < \text{tg} \alpha$). Пренебрегая сопротивлением шин и перемычки, найти ее установившуюся скорость. Перемычка находится в горизонтальной плоскости и перпендикулярна шинам (рис.10.26).

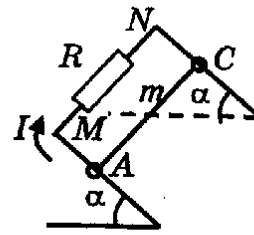


Рис. 10.26

Решение.

Пусть установившаяся скорость перемычки равна v , тогда в перемычке возникает ЭДС индукции $\mathcal{E}_i = Blv$. Так как цепь замкнута, по ней протекает индукционный ток $I = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = \frac{Blv}{R}$.

Силы, действующие на перемычку: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции со стороны шин \vec{N} , сила трения скольжения $\vec{F}_{\text{тр}}$ ($F_{\text{тр}} = \mu N$) и сила Ампера, действующая со стороны магнитного поля. Причем модуль силы Ампера

$$F_A = BIl \sin 90^\circ = BIl = B \left(\frac{Blv}{R} \right) l = \frac{B^2 l^2 v}{R}$$

(Здесь учтено, что угол между направлением тока и вектором магнитной индукции равен 90° .)

Пусть индукция \vec{B} магнитного поля направлена так, как показано на рис. 10.27. Тогда при движении перемычки вниз по шинам поток внешнего магнитного поля через замкнутый контур

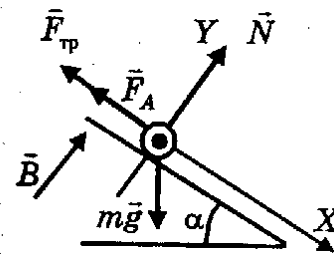


Рис. 10.27.

$AMNC$ (рис. 10.26) возрастает. Следовательно, по правилу Ленца индукционный ток в контуре направлен так, чтобы созданное им магнитное поле стремилось компенсировать увеличение магнитного потока. Отсюда можно сделать вывод, что индукция магнитного поля, созданного индукционным током, направлена противо-

положно вектору \vec{B} . Используя правило буравчика, находим, что индукционный ток в контуре $AMNC$ направлен по часовой стрелке, если смотреть на этот контур сверху. На рис. 10.27 индукционный ток направлен к нам, поэтому сила Ампера, приложенная к перемычке, направлена вверх вдоль шин.

Введем оси координат X и Y и запишем второй закон Ньютона.

$$\begin{cases} mgsin\alpha - F_{тр} - F_A = 0, \\ N - mgcos\alpha = 0. \end{cases}$$

Здесь учтено, что при постоянной скорости перемычки ее ускорение $a = 0$.

Из второго уравнения $N = mgcos\alpha$, поэтому

$$F_{тр} = \mu N = \mu mgcos\alpha.$$

Подставив в первое уравнение, получим

$$mgsin\alpha - \mu mgcos\alpha - \frac{B^2 l^2 v}{R} = 0 \Rightarrow v = \frac{mgR}{B^2 l^2} (sin\alpha - \mu cos\alpha).$$

Задача 10.16. Металлический стержень AB , сопротивление единицы длины которого равно ρ , движется с постоянной скоростью v , перпендикулярной AB , замыкая два проводника OC и OD с пренебрежимо малыми сопротивлениями, образующими между собой угол α . $OC = l$ и $AB \perp OC$. Вся система находится в однородном магнитном поле, индукция B которого перпендикулярна плоскости системы. Найти полное количество теплоты, которое выделится в цепи за время движения стержня AB от точки O до точки C .

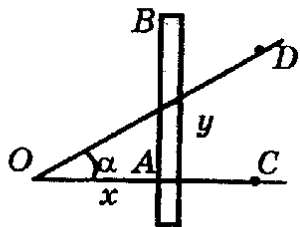


Рис. 10.28

Решение.

Пусть $OA = x$, тогда длина части стержня AB , образующего замкнутый контур, $y = x \operatorname{tg}\alpha$. ЭДС индукции, которая возникает в подвижном стержне и действует во всем замкнутом контуре, $\mathcal{E}_i = Bv y$. Индукционный ток в

контуре $I = \frac{\mathcal{E}_i}{R}$, где R – сопротивление контура, равно сопротивлению участка стержня длиной y . Поэтому $R = \rho y$ и

$$I = \frac{Bv y}{\rho y} = \frac{Bv}{\rho} = \text{const}.$$

Таким образом, в контуре протекает постоянный ток. Выделяющаяся в нем мощность

$$P = I^2 R = \left(\frac{Bv}{\rho}\right)^2 \rho y = \frac{(Bv)^2}{\rho} x \operatorname{tg}\alpha = \frac{(Bv)^2}{\rho} (vt) \operatorname{tg}\alpha =$$

$$= \frac{B^2 v^3}{\rho} \operatorname{tg}\alpha t.$$

Здесь учтено, что при равномерном движении стержня в любой момент времени $x = vt$. Таким образом, мощность, выделяющаяся в контуре, не является постоянной, а линейно возрастает с течением времени. Для того, чтобы найти полное количество выделившейся теплоты, построим график зависимости $P(t)$, который представляет собой прямую линию (рис. 10.29).

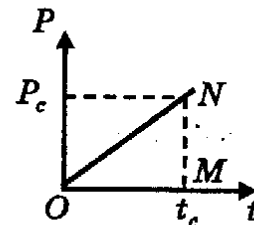


Рис. 10.29

Время движения стержня до точки C $t_c = \frac{l}{v}$. Количество теплоты численно равно площади ΔOMN , причем его катет

$$MN = P_c = P(t_c) = \frac{B^2 v^3}{\rho} \operatorname{tg}\alpha \left(\frac{l}{v}\right) = \frac{(Bv)^2 l}{\rho} \operatorname{tg}\alpha.$$

$$Q = \frac{1}{2} P_c \cdot t_c = \frac{1}{2} \frac{(Bv)^2 l}{\rho} \operatorname{tg}\alpha \left(\frac{l}{v}\right) = \frac{B^2 v l}{2\rho} \operatorname{tg}\alpha.$$

Задача 10.17. В магнитном поле с большой высоты падает кольцо, имеющее диаметр d и сопротивление R . Плоскость кольца все время горизонтальна. Найти установившуюся скорость падения кольца, если вертикальная составляющая индукции магнитного поля изменяется с высотой H по закону $B = B_0(1 + \alpha H)$, где $\alpha = \text{const}$ (рис. 10.30).

Решение.

Пусть \vec{n} – нормаль к плоскости кольца, тогда магнитный поток, созданный вертикальной составляющей магнитного поля,

$$\Phi = BS = B_0(1 + \alpha H)S, \text{ где } S = \frac{\pi d^2}{4} - \text{площадь контура.}$$

ЭДС индукции, возникающая в кольце,

$$\mathcal{E}_i = -\Phi'(t) = -(B_0(1 + \alpha H)S)' = -B_0 S \alpha H'(t).$$

Производная $H'(t) = v_H$ – это проекция скорости кольца на ось

H . Таким образом,

$$\mathcal{E}_i = -B_0 S \alpha (-v_H). \text{ Так как скорость кольца направлена против оси } H,$$

то $v_H = -v$, где v – модуль скорости кольца и $\mathcal{E}_i = B_0 S \alpha v$. По

кольцу протекает индукционный ток

$$I = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = \frac{B_0 S \alpha v}{R}.$$

В результате в

кольце за промежуток времени Δt

выделяется количество теплоты

$$Q = I^2 R \Delta t.$$

На высоте H_1 кольцо обладает механической энергией

$$W_1 = mgH_1 + \frac{mv^2}{2}, \text{ на высоте } H_2 - W_2 = mgH_2 + \frac{mv^2}{2}$$

($v = \text{const}$, т.е. скорость кольца не меняется). По закону сохранения энергии

$$W_1 = W_2 + Q \Rightarrow mgH_1 = mgH_2 + I^2 R \Delta t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow mg(H_1 - H_2) = \left(\frac{B_0 S \alpha v}{R} \right)^2 R \Delta t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow mg(H_1 - H_2) = \frac{(B_0 S \alpha v)^2}{R} \Delta t \quad (*)$$

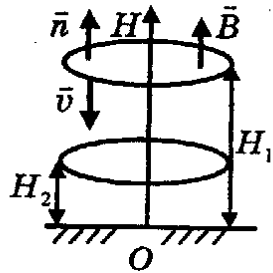


Рис. 10.30

Разность $(H_1 - H_2)$ есть расстояние, пройденное кольцом при равномерном движении, поэтому $H_1 - H_2 = v \Delta t$, и уравнение (*) примет вид:

$$mgv \Delta t = \frac{(B_0 S \alpha v)^2}{R} \Delta t \Rightarrow mg = \frac{(B_0 S \alpha)^2 v}{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \frac{mgR}{(B_0 S \alpha)^2} = \frac{16mgR}{(B_0 \pi d^2 \alpha)^2}.$$

Задача 10.18. Имеется электродвигатель постоянного тока с независимым возбуждением. Записать закон Ома для цепи якоря такого двигателя, подключенного к источнику постоянного напряжения U . Выразить полезную мощность двигателя. Построить графики зависимостей силы тока в цепи якоря и полезной мощности от угловой скорости вращения якоря.

Решение.

Любой электродвигатель постоянного тока включает в себя такие конструктивные элементы, как индуктор (статор) и якорь. Индуктор создает магнитное поле (им может быть магнит или электромагнит). Когда по обмотке якоря пропускают электрический ток, якорь, находящийся в магнитном поле индуктора, начинает вращаться. Термин «независимое возбуждение» означает, что обмотки якоря и индуктора подсоединяются к различным источникам тока. В электродвигателе происходит преобразование электрической энергии в механическую.

При работе электродвигателя в электрической цепи якоря имеются две электродвижущие силы – напряжение источника U и ЭДС индукции \mathcal{E}_i , возникающая в обмотке якоря при его вращении в магнитном поле. Причем ЭДС индукции, согласно правилу Ленца, противоположна напряжению источника тока, поэтому закон Ома для цепи якоря запишется в виде:

$$U - |\mathcal{E}_i| = IR \quad (10.25)$$

где I – сила тока в цепи якоря, R – общее сопротивление цепи якоря.

Из закона сохранения энергии следует, что мощность, потребляемая от источника и равная UI , частично выделяется в

виде тепловой мощности $I^2 R$, а часть ее переходит в полезную мощность P . Поэтому $uI = I^2 R + P$, откуда

$$P = uI - I^2 R \quad (10.26)$$

Умножив равенство (10.25) на I , получим

$$uI - |\mathcal{E}_i|I = I^2 R \Rightarrow uI = I^2 R + |\mathcal{E}_i|I.$$

Откуда следует, что полезная мощность

$$P = |\mathcal{E}_i|I \quad (10.27)$$

Из закона электромагнитной индукции следует, что ЭДС индукции, возникающая в обмотке якоря, пропорциональна скорости изменения магнитного потока через эту обмотку. В свою очередь, эта скорость пропорциональна угловой скорости вращения якоря ω . В итоге получаем, что $|\mathcal{E}_i| = \alpha\omega$,

где α — коэффициент пропорциональности. Выражая из формулы (10.25) силу тока, получаем, что

$$I = \frac{u - |\mathcal{E}_i|}{R} = \frac{u - \alpha\omega}{R}.$$

График зависимости $I(\omega)$ приведен на рис. 10.31.

Полезная мощность

$$P = |\mathcal{E}_i|I = |\mathcal{E}_i| \left(\frac{u - |\mathcal{E}_i|}{R} \right) =$$

$$= \frac{u|\mathcal{E}_i| - |\mathcal{E}_i|^2}{R} = \frac{u\alpha\omega - \alpha^2\omega^2}{R} = \frac{u\alpha}{R}\omega - \frac{\alpha^2}{R}\omega^2.$$

График этой зависимости — парабола (рис. 10.32).

Задача 10.19. Чему равен КПД электромотора, если при включении его в сеть постоянного тока ток, протекающий по его обмотке $I_0 = 15$ А, а в установившемся режиме ток снижается до $I = 9$ А?

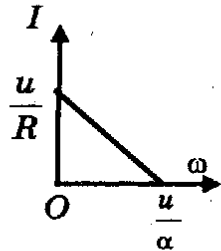


Рис. 10.31

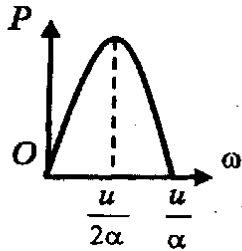


Рис. 10.32

Решение.

Пусть мотор подключается к источнику с ЭДС, равной \mathcal{E} . В задаче 10.18 было показано, что закон Ома для цепи якоря записывается в виде: $\mathcal{E} - |\mathcal{E}_i| = IR$, где \mathcal{E}_i — ЭДС индукции, возникающая в цепи якоря, I — сила тока в этой цепи, R — ее полное сопротивление. В момент пуска якорь неподвижен, поэтому $\mathcal{E}_i = 0$ и $\mathcal{E} = I_0 R$ (*). Там же было установлено, что полезная мощность мотора $P = \mathcal{E}I - I^2 R$, а потребляемая им мощность — $\mathcal{E}I$. Коэффициент полезного действия мотора

$$\eta = \frac{P}{\mathcal{E}I} = \frac{\mathcal{E}I - I^2 R}{\mathcal{E}I} = 1 - I \frac{R}{\mathcal{E}}.$$

Из равенства (*) следует, что $\frac{R}{\mathcal{E}} = \frac{1}{I_0}$, поэтому $\eta = 1 - \frac{I}{I_0} = 0,4$ или $\eta = 40\%$.

Задача 10.20. Две катушки индуктивностью L_1 и L_2 подключены через ключи K_1 и K_2 к источнику с ЭДС \mathcal{E} и внутренним сопротивлением r . В начальный момент оба ключа разомкнуты. После того, как ключ K_1 замкнули, и ток через катушку L_1 достиг значения I_0 , замыкают ключ K_2 . Определить установившийся ток через катушки L_1 и L_2 после замыкания ключа K_2 . Сопротивлением катушек пренебречь (рис. 10.33).

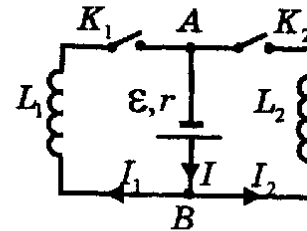


Рис. 10.33

Решение.

За начало отсчета времени принимаем момент времени замыкания ключа K_2 . Время до установки токов обозначим через t .

После замыкания ключа K_2 в катушке L_1 действует ЭДС самоиндукции, равная $-L_1 i_1'(t)$. ЭДС самоиндукции в катушке L_2 равна $-L_2 i_2'(t)$. Так как сопротивлением катушек и прово-

дов можно пренебречь, то после замыкания ключа K_2 в любой момент времени разности потенциалов на катушках, равные ЭДС самоиндукции в них, одинаковы. Получаем равенство: $-L_1 i_1'(t) = -L_2 i_2'(t) \Rightarrow L_1 i_1'(t) = L_2 i_2'(t)$.

Принтегрируем это равенство:

$$\int_0^\tau L_1 i_1'(t) dt = \int_0^\tau L_2 i_2'(t) dt \Rightarrow L_1 \int_0^\tau i_1'(t) dt = L_2 \int_0^\tau i_2'(t) dt \Rightarrow L_1 i_1(t) \Big|_0^\tau = L_2 i_2(t) \Big|_0^\tau \Rightarrow L_1 (i_1(\tau) - i_1(0)) = L_2 (i_2(\tau) - i_2(0)).$$

Из условия задачи следует, что $i_1(0) = I_0$, $i_2(0) = 0$. Кроме того, $i_1(\tau) = I_1$, а $i_2(\tau) = I_2$, где I_1 и I_2 — установившийся в катушках ток. После подстановки получаем $L_1(I_1 - I_0) = L_2 I_2$ (*).

Направление токов I_1 и I_2 показано на рис. 10.33. Разность потенциалов между точками A и B есть \mathcal{E} , поэтому общий ток $I = \frac{\mathcal{E}}{r}$. Используя первое правило Кирхгофа, записываем уравнение $I - I_1 - I_2 = 0 \Rightarrow I_1 + I_2 = I$ (**).

Выражаем из уравнения (**) $I_2 = I - I_1$ и подставляем в уравнение (*). Получаем, что $L_1(I_1 - I_0) = L_2(I - I_1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{L_2 I + L_1 I_0}{L_1 + L_2}, \text{ а } I_2 = \frac{L_1(I - I_0)}{L_1 + L_2}, \text{ где } I = \frac{\mathcal{E}}{r}.$$

Задача 10.21. Сверхпроводящее круглое кольцо радиусом r , имеющее индукцией L , находится в однородном магнитном поле с индукцией B . Первоначально плоскость кольца была параллельна вектору \vec{B} , а ток в кольце равен нулю. Какую работу нужно совершить, чтобы повернуть кольцо так, чтобы его плоскость стала перпендикулярна линиям индукции?

Решение.

Кольцо пронизывается как внешним магнитным потоком $\Phi_{\text{вн}}$, так и собственным магнитным потоком Φ_c , созданным током, протекающим по кольцу. Поэтому полный магнитный поток $\Phi = \Phi_{\text{вн}} + \Phi_c$, а ЭДС индукции в кольце

$\mathcal{E}_i = -\Phi' = -\Phi'_{\text{вн}} - \Phi'_c = -\Phi'_{\text{вн}} - Li'$, где i' — скорость изменения тока.

Сопротивление сверхпроводящего кольца $R = 0$, поэтому по закону Ома $\mathcal{E}_i = IR = 0$. Отсюда следует, что

$-\Phi'_{\text{вн}} - Li' = 0 \Rightarrow -\Phi'_{\text{вн}} = Li'$. Проинтегрировав это равенство от нуля до τ , где τ — время поворота кольца, найдем, что

$$-\int_0^\tau \Phi'_{\text{вн}} dt = \int_0^\tau Li' dt \Rightarrow -\Phi_{\text{вн}}(t) \Big|_0^\tau = Li(t) \Big|_0^\tau \Rightarrow -(\Phi_{\text{вн}}(\tau) - \Phi_{\text{вн}}(0)) = L(i(\tau) - i(0)).$$

В начальный момент времени $i(0) = 0$, $\Phi_{\text{вн}}(0) = BS \cos 90^\circ = 0$.

В момент времени τ , когда кольцо перпендикулярно линиям индукции, $\Phi_{\text{вн}}(\tau) = BS \cos 0^\circ = BS$, где $S = \pi r^2$, а ток

$$i(\tau) = I. \text{ Таким образом, } -BS = LI \Rightarrow I = -\frac{BS}{L}.$$

Начальная энергия магнитного поля кольца $W(0) = 0$, ко-

нечное значение этой энергии $W(\tau) = \frac{LI^2}{2}$. Увеличение энергии произошло за счет работы внешних сил, поэтому

$$\Delta W = W(\tau) - W(0) = A \Rightarrow A = \frac{LI^2}{2} = \frac{(BS)^2}{2L} = \frac{(B\pi r^2)^2}{2L}.$$

Задача 10.22. В схеме, изображенной на рис. 10.34, в начальный момент времени ключ K разомкнут, конденсатор не заряжен. Определить максимальное значение тока после замыкания ключа. Заданы L, C, \mathcal{E}_0 . Сопротивлением катушки и источника пренебречь.

Решение.

ЭДС самоиндукции в катушке $\mathcal{E}_c = -Li'(t)$, где $i'(t)$ — производная от тока по времени. Когда через катушку протекает максимальный ток, эта производная обращается в ноль. Следовательно, и $\mathcal{E}_c = 0$. Поэтому на-

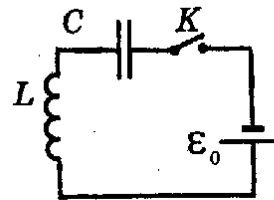


Рис. 10.34

пряжение на конденсаторе в этот момент равно напряжению источника \mathcal{E}_0 . При этом заряд конденсатора $q = C\mathcal{E}_0$. Именно этот заряд протекает через источник, при этом работа сторонних сил $A_{ст} = q\mathcal{E}_0 = C\mathcal{E}_0^2$. Эта работа идет на изменение энергии конденсатора и катушки индуктивности, т.е. $A_{ст} = W_э + W_м$,

где $W_э = \frac{C\mathcal{E}_0^2}{2}$ – энергия электрического поля конденсатора, а

$W_м = \frac{LI_{\max}^2}{2}$ – энергия магнитного поля катушки. Итак,

$$C\mathcal{E}_0^2 = \frac{C\mathcal{E}_0^2}{2} + \frac{LI_{\max}^2}{2} \Rightarrow I_{\max} = \mathcal{E}_0 \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Глава 11. Колебания. Переменный электрический ток

11.1. Основные свойства колебательных процессов

В природе и технике существуют процессы, в которых изменение во времени физических величин происходит периодически или приблизительно периодически. Такие процессы называют колебаниями. Простейшим примером колебаний являются механические колебания – движения тел, повторяющиеся точно или приблизительно через одинаковые промежутки времени.

Колебания, происходящие под влиянием внешних периодических воздействий (в механике – сил) на систему, называются вынужденными колебаниями.

Колебания, происходящие в системе без внешних периодических воздействий на нее, называются свободными колебаниями.

Несмотря на то, что колебания могут иметь различную физическую природу, они описываются одинаковыми величинами и уравнениями. Для описания колебаний используются величины, характеризующие колебательное движение в целом: период, частота и амплитуда колебаний.

Период колебаний T – это минимальный промежуток времени, через который колебательный процесс повторяется. Другими словами, период – это продолжительность одного колебания.

Частота колебаний ν – это число колебаний в единицу времени (в системе СИ за 1 секунду). Частота колебаний – величина, обратная периоду:

$$\nu = \frac{1}{T} \quad (11.1)$$

Циклическая (круговая) частота ω – это число колебаний за 2π секунд:

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \quad (11.2)$$

Частоту свободных колебаний называют собственной частотой колебательной системы и обозначают ω_0 .

Амплитуда колебаний $A > 0$ – это наибольшее отклонение колеблющегося тела от положения равновесия. В случае, когда речь идет не о механических колебаниях, амплитуда колебаний указывает пределы изменения функции $x(t)$, которая характеризует колебательный процесс:

$$-A \leq x(t) \leq A.$$

Если амплитуда колебаний с течением времени убывает, то колебания называют затухающими.

11.2. Гармонические колебания

Из различных видов колебательных процессов (свободных и вынужденных) особый интерес представляют гармонические колебания – колебания, происходящие по закону синуса или косинуса от времени t . Они описываются формулами

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0) \text{ или } x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (11.3)$$

где $x(t)$ – функция, описывающая колебательный процесс.

Фазой колебаний называют величину

$$\varphi(t) = \omega t + \varphi_0 \quad (11.4)$$

где φ_0 – фаза колебаний в момент времени $t = 0$, ее называют начальной фазой колебаний.

В случае механических колебаний функция $x(t)$ в формулах (11.3) представляет собой координату колеблющегося тела.

Пусть начальная фаза колебаний $\varphi_0 = 0$, тогда координата колеблющегося тела выражается формулой $x(t) = A \sin \omega t$. Из этой формулы следует, что в момент времени $t = 0$ $x(t) = 0$, т.е. тело находится в начале координат. Выясним, через какой минимальный промежуток времени t смещение тела станет равным амплитуде A . Получаем уравнение $x(t) = A \Rightarrow$

$$A \sin \omega t = A \Rightarrow \sin \omega t = 1 \Rightarrow \omega t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{1}{4} T, \text{ где}$$

T – период колебаний. Итак, тело смещается из положения равновесия на расстояние, равное амплитуде колебаний, за время.

равное четверти периода колебаний. Легко доказать, что время движения в обратном направлении также равно четверти периода колебаний.

11.3. Скорость и ускорение тела, совершающего гармонические колебания

Пусть тело совершает гармонические колебания по закону $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$. Известно, что первая производная от координаты тела по времени есть проекция скорости этого тела на направление движения, поэтому скорость тела, совершающего гармонические колебания:

$$\begin{aligned} v_x(t) &= x'(t) = (A \cos(\omega t + \varphi_0))' = -A \sin(\omega t + \varphi_0) \cdot (\omega t + \varphi_0)' = \\ &= -A \omega \sin(\omega t + \varphi_0) = A \omega \cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Заменив $A \omega$ на v_m , получим

$$v_x(t) = v_m \cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right). \quad (11.5)$$

Следовательно, при гармонических колебаниях скорость тела не постоянна, а также совершает гармонические колебания с той же частотой ω , а значит, и периодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$, и амплитудой

$v_m = A \omega$. Сравнивая формулы (11.3) и (11.5), получаем, что фазы колебаний скорости и координаты отличаются на $\pi/2$. Из этого, в частности, следует, что когда смещение тела от положения равновесия равно амплитуде, т.е. максимально, скорость тела обращается в ноль. И, наоборот, когда тело проходит положение равновесия, т.е. смещение минимально, модуль скорости достигает максимального значения.

Вторая производная от координаты или первая производная от скорости по времени равны проекции ускорения тела, поэтому ускорение тела, совершающего гармонические колебания:

$$\begin{aligned} a_x(t) &= v'(t) = (-A \omega \sin(\omega t + \varphi_0))' = \\ &= -A \omega \cos(\omega t + \varphi_0) \cdot (\omega t + \varphi_0)' = -A \omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) = \end{aligned}$$

$$= A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0 + \pi).$$

Заменив $A\omega^2$ на a_m , получим

$$a_x(t) = a_m \cos(\omega t + \varphi_0 + \pi). \quad (11.6)$$

Следовательно, при гармонических колебаниях ускорение тела не постоянно, а совершает гармонические колебания с той же частотой ω и периодом T , что координата и скорость. Амплитуда колебаний ускорения $a_m = A\omega^2$. Сравнивая формулы (11.3), (11.5) и (11.6), приходим к выводу, что фазы колебаний ускорения и координаты отличаются на π (ускорение и координата колеблются в противофазе); фазы колебаний ускорений и скорости отличаются на $\pi/2$. Из этого следует, что когда скорость тела максимальна (тело проходит положение равновесия), его ускорение обращается в ноль. И, наоборот, когда скорость минимальна (смещение тела равно амплитуде), модуль ускорения тела достигает максимального значения.

Итак, при гармонических колебаниях тела его ускорение $a_x = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 (A \cos(\omega t + \varphi_0)) = -\omega^2 x(t)$, т.е. пропорционально координате. В соответствии со вторым законом Ньютона причиной, вызывающей ускорение, является приложенная к телу сила $F = ma_x = -m\omega^2 x$. Следовательно, при гармонических колебаниях на тело должна действовать сила или равнодействующая сил, пропорциональная смещению тела и направленная к положению равновесия. Ее часто называют возвращающей силой, хотя это не особая сила, а равнодействующая реальных сил природы, обусловленных взаимодействием тела с другими телами.

11.4. Пружинный маятник

Рассмотрим в качестве примера колебания пружинного маятника. Он представляет собой груз массой m , расположенный на гладкой горизонтальной поверхности. Колебания происходят на пружине с коэффициентом жесткости k (рис. 11.1). Начало координат $x_0 = 0$ находится в точке, соответствующей положению равновесия груза, когда пружина не деформирована.

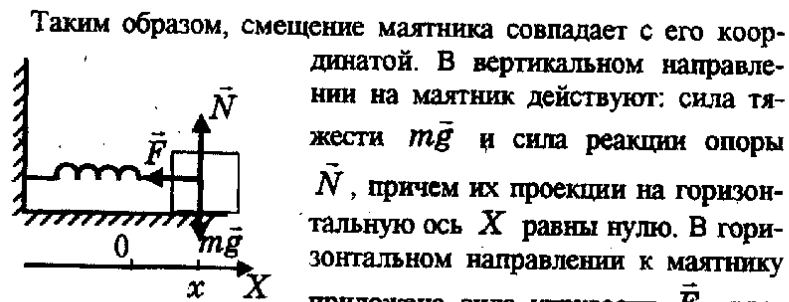


Рис. 11.1

Таким образом, смещение маятника совпадает с его координатой. В вертикальном направлении на маятник действуют: сила тяжести $m\bar{g}$ и сила реакции опоры \bar{N} , причем их проекции на горизонтальную ось X равны нулю. В горизонтальном направлении к маятнику приложена сила упругости \bar{F} , проекция которой на ось X в любой момент времени $F_x = -kx$ (закон Гука), где x — координата тела. По второму закону Ньютона $F_x = ma_x$, где проекция ускорения a_x равна второй производной от координаты. После подстановки F_x и a_x получаем

$$-kx = mx'' \Rightarrow x'' + \frac{k}{m}x = 0.$$

Полученное уравнение отличается от уравнений, которые решают в школе, тем, что в него входит неизвестная функция $x(t)$ и ее вторая производная. Такие уравнения называются дифференциальными. Обозначив положительную величину k/m через ω_0 , получим

$$x'' + \omega_0^2 x = 0 \quad (11.7)$$

Нетрудно доказать подстановкой, что решениями этого уравнения будут функции $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ или $x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$. Следовательно, пружинный маятник совершает свободные колебания, которые являются гармоническими. Одновременно было показано, что гармонические колебания любой физической природы описываются дифференциальным уравнением (11.7).

Собственная частота колебаний пружинного маятника

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (11.8)$$

а период

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (11.9)$$

Формулы (11.8) и (11.9) иллюстрируют общее свойство систем, совершающих свободные колебания: собственная частота и период колебаний зависит только от свойств системы (для пружинного маятника – от массы тела m и коэффициента жесткости пружины k). Что касается амплитуды и начальной фазы колебаний, то они определяются начальными условиями, т.е. тем, как возбуждены колебания.

Уравнение колебаний пружинного маятника можно получить иначе, воспользовавшись тем, что при отсутствии трения полная механическая энергия колеблющегося тела не изменяется. Механическая энергия маятника W складывается из кинетической энергии W_k и потенциальной энергии упругой деформации W_p , т.е. $W = W_k + W_p = \text{const}$, где $W_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m(x')^2}{2}$, а $W_p = \frac{kx^2}{2}$. Найдем производную от полной энергии по времени:

$$\begin{aligned} W' &= \left(\frac{m(x')^2}{2} + \frac{kx^2}{2} \right)' = \left(\frac{m(x')^2}{2} \right)' + \left(\frac{kx^2}{2} \right)' = \\ &= \frac{m}{2} ((x')^2)' + \frac{k}{2} (x^2)' = \frac{m}{2} \cdot 2x' \cdot x'' + \frac{k}{2} \cdot 2x \cdot x' = \\ &= mx'x'' + kxx' = (mx'' + kx)x'. \end{aligned}$$

Так как полная механическая энергия не изменяется, то ее производная по времени $W' = 0$. Получаем уравнение

$$(mx'' + kx)x' = 0 \Rightarrow mx'' + kx = 0 \Rightarrow x'' + \frac{k}{m}x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x'' + \omega_0^2 x = 0, \text{ где } \omega_0^2 = \frac{k}{m}. \text{ Таким образом, получаем}$$

дифференциальное уравнение гармонических колебаний.

11.5. Математический маятник

Рассмотрим малые колебания математического маятника – небольшого шарика, совершающего колебания в вертикальной плоскости на невесомой нерастяжимой нити длиной l (рис. 11.2).

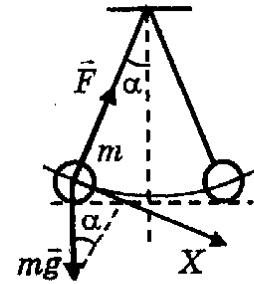


Рис. 11.2

При малых колебаниях угол отклонения нити не превышает 10° . Колебания маятника совершаются под действием двух сил: силы тяжести $m\vec{g}$ и силы натяжения (упругости) нити \vec{F} . Величиной, описывающей данный колебательный процесс, является угол $\alpha(t)$ – угол

отклонения нити в момент времени t от вертикального равновесного положения.

Спроецируем действующие силы на ось X , направленную по касательной к дуге в точке, где в данный момент времени расположен маятник. Проекция силы натяжения равна нулю, а проекция силы тяжести равна $(-mg\sin\alpha)$. Известно, что при малых углах α , выраженных в радианах, $\sin\alpha = \alpha$. В любой момент времени дуга $AB = l\alpha$, а касательное (тангенциальное) ускорение есть вторая производная от $l\alpha$ по времени, т.е. $a_\tau = l\alpha''$. По второму закону Ньютона получаем

$$-mg\sin\alpha = ma_\tau \Rightarrow -g\alpha = l\alpha'' \Rightarrow \alpha'' + \frac{g}{l}\alpha = 0.$$

Полагая $\frac{g}{l} = \omega_0^2$, получаем дифференциальное уравнение гармонических колебаний математического маятника:

$$\alpha'' + \omega_0^2 \alpha = 0.$$

Его решение: $\alpha(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$. Собственная частота и период колебаний математического маятника не зависят от массы и выражаются формулами:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (11.10)$$

$$\text{и } T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (11.11)$$

11.6. Свободные электромагнитные колебания в колебательном контуре

В природе существуют не только механические колебания. Катушка индуктивности L и конденсатор C образуют колебательный контур, в котором происходят свободные колебания заряда конденсатора, тока и напряжения на конденсаторе (рис. 11.3).

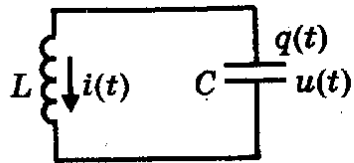


Рис. 11.3

Свободные колебания в этой системе возникают, например, после сообщения конденсатору заряда q_m , который затем разряжается через катушку, создавая ток в контуре.

Пусть в момент времени t заряд конденсатора – $q(t)$, а ток в контуре – $i(t)$. Полная энергия контура равна сумме энергий магнитного и электрического полей: $W = W_s + W_m$, где

$W_s = \frac{q^2}{2C}$ – энергия, сосредоточенная в электрическом поле конденсатора, а $W_m = \frac{Li^2}{2}$ – энергия, сосредоточенная в магнитном поле катушки. Таким образом, $W = \frac{q^2}{2C} + \frac{Li^2}{2}$. Если активное (омическое) сопротивление контура равно нулю, то полная энергия контура сохраняется: $W = \text{const}$.

Найдем производную по времени от полной энергии колебательного контура:

$$\begin{aligned} W' &= \left(\frac{q^2}{2C} + \frac{Li^2}{2} \right)' = \left(\frac{q^2}{2C} \right)' + \left(\frac{Li^2}{2} \right)' = \frac{1}{2C} (q^2)' + \frac{L}{2} (i^2)' = \\ &= \frac{1}{2C} \cdot 2q \cdot q' + \frac{L}{2} \cdot 2i \cdot i' = \frac{qq'}{C} + Lii'. \end{aligned}$$

Учтем, что мгновенное значение тока есть производная по времени от заряда. Поэтому $i = q'$, а $i' = q''$. Следовательно,

$$W' = \frac{qq'}{C} + Lq'q'' = \left(\frac{q}{C} + Lq'' \right) q'.$$

Так как $W = \text{const}$, то $W' = 0$, и, следовательно,

$$\left(\frac{q}{C} + Lq'' \right) q' = 0 \Rightarrow Lq'' + \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow q'' + \frac{1}{LC} q = 0.$$

Обозначив $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$, получаем уравнение гармонических колебаний в контуре

$$\boxed{q'' + \omega_0^2 q = 0} \quad (11.12)$$

Решение этого уравнения: $q(t) = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, где q_m – амплитуда колебаний заряда. Заряд конденсатора совершает гармонические колебания с частотой и периодом, вычисляемым по формулам:

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \quad (11.13)$$

$$\text{и } \boxed{T = 2\pi\sqrt{LC}} \quad (\text{формула Томпсона}) \quad (11.14)$$

В любой момент времени напряжение на конденсаторе

$$u(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{q_m}{C} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = u_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (11.15)$$

где $u_m = \frac{q_m}{C}$.

Из формулы (11.15) следует, что напряжение на конденсаторе совершает гармонические колебания с теми же частотой ω_0 и периодом T , что и заряд. Амплитуда колебаний напряжения

$u_m = \frac{q_m}{C}$; фазы колебаний напряжения и заряда совпадают.

$$\begin{aligned} \text{Ток в контуре } i(t) &= q'(t) = (q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0))' = \\ &= -q_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = q_m \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi/2). \end{aligned}$$

где $q_m \omega_0 = I_m$. Отсюда следует, что ток в контуре совершает гармонические колебания с теми же частотой и периодом, что заряд и напряжение; фаза колебаний тока опережает фазу колебаний заряда и напряжения на $\pi/2$, амплитуда колебаний тока $I_m = q_m \omega_0$.

11.7. Вынужденные колебания. Резонанс

Вынужденные колебания происходят, когда на систему действуют внешние периодические силы (воздействия). При вынужденных колебаниях в системе через некоторый промежуток времени устанавливаются колебания, частота которых равна частоте внешней периодической силы. В общем случае частота внешней силы не совпадает с собственной частотой колебаний системы. Если внешняя периодическая сила изменяется по гармоническому закону, то при совпадении ее частоты ω с собственной частотой колебаний системы ω_0 наступает резонанс – резкое возрастание амплитуды установившихся вынужденных колебаний. Итак, условие резонанса:

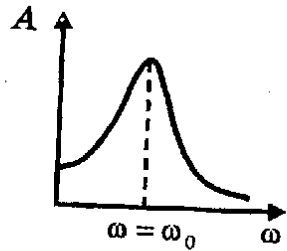


Рис. 11.4

$$\omega = \omega_0 \quad (11.16)$$

Разумеется, при выполнении условия (11.16) будут совпадать период внешней силы и период собственных колебаний системы, т.е. $T = T_0$.

На рис. 11.4 приведен график зависимости амплитуды вынужденных колебаний A от частоты ω внешней периодической силы.

11.8. Переменный электрический ток в цепи, содержащей резистор. Действующие значения тока и напряжения

Вынужденные колебания происходят в электрической цепи, содержащей источник, напряжение которого изменяется по гар-

моническому закону $u(t) = u_m \cos \omega t$, где u_m – амплитуда колебаний.

Рассмотрим вынужденные электрические колебания в цепи, содержащей активное (омическое) сопротивление R (рис.11.5).

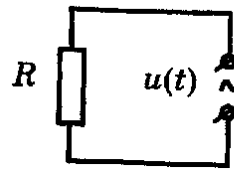


Рис. 11.5

Мгновенное значение тока

$$i(t) = \frac{u}{R} = \frac{u_m \cos \omega t}{R} = \frac{u_m}{R} \cos \omega t. \quad \text{Следовательно, в проводнике с активным сопротивлением колебания силы тока происходят с той же частотой } \omega, \text{ что и колебания напряжения; по фазе они совпадают с колебаниями напряжения; амплитуда определяется равенством}$$

$$I_m = \frac{u_m}{R} \quad (11.17)$$

По закону Джоуля-Ленца в проводнике будет выделяться теплота, причем мгновенное значение мощности $p(t) = i^2 R = I_m^2 R \cos^2 \omega t$. Энергия, выделяющаяся в проводнике за период T :

$$\begin{aligned} W &= \int_0^T p(t) dt = \int_0^T I_m^2 R \cos^2 \omega t dt = I_m^2 R \int_0^T \cos^2 \omega t dt = \\ &= I_m^2 R \int_0^T \frac{1 + \cos 2\omega t}{2} dt = \frac{1}{2} I_m^2 R \left(\int_0^T dt + \int_0^T \cos 2\omega t dt \right) = \\ &= \frac{1}{2} I_m^2 R \left(t \Big|_0^T + \frac{1}{2\omega} \sin 2\omega t \Big|_0^T \right) = \frac{1}{2} I_m^2 R \left(T + \frac{\sin 2\omega T}{2\omega} \right). \end{aligned}$$

Отметим, что $\sin 2\omega T = \sin 2 \cdot \left(\frac{2\pi}{T} \right) T = \sin 4\pi = 0$, поэтому

$$W = \frac{1}{2} I_m^2 R T.$$

Переменный ток принято характеризовать средней мощностью за период, определяемой формулой

$$\bar{P} = \frac{W}{T} \quad (11.18)$$

Средняя мощность переменного тока, выделяющаяся в активном сопротивлении:

$$\bar{P} = \frac{W}{T} = \frac{1}{2} I_m^2 R = \left(\frac{I_m}{\sqrt{2}} \right)^2 R. \quad (11.19)$$

При этом величину

$$I_d = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad (11.20)$$

называют действующим значением тока. Тогда

$$\bar{P} = I_d^2 R \quad (11.21)$$

Аналогично можно ввести действующее значение напряжения:

$$u_d = \frac{u_m}{\sqrt{2}} \quad (11.22)$$

где u_m — амплитудное значение напряжения. Нетрудно получить, что

$$I_d = \frac{u_d}{R} \quad (11.23)$$

11.9. Переменный электрический ток в цепи, содержащей конденсатор. Емкостное сопротивление

Рассмотрим вынужденные колебания в электрической цепи, содержащей конденсатор (рис. 11.6).

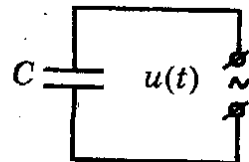


Рис. 11.6

Переменное напряжение на конденсаторе $u(t) = u_m \cos \omega t$. Пусть $q(t)$ — мгновенное значение заряда конденсатора, тогда $q(t) = Cu_m \cos \omega t$. Сила тока в цепи $i(t) = q'(t) =$

$$= (Cu_m \cos \omega t)' = -Cu_m \omega \sin \omega t = u_m C \omega \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right).$$

Следовательно, колебания силы тока происходят с той же частотой, что и колебания напряжения; колебания силы тока опере-

жают колебания напряжения на $\pi/2$; амплитуда колебаний тока $I_m = u_m C \omega$. Последнее выражение можно записать в форме, аналогичной закону Ома для постоянного тока:

$$I_m = \frac{u_m}{(1/\omega C)} = \frac{u_m}{X_c}, \quad (11.24)$$

где

$$X_c = \frac{1}{\omega C} \quad (11.25)$$

— емкостное сопротивление конденсатора переменному току. Если конденсатор отсутствует, то $C \rightarrow \infty$ и тогда $X_c = 0$. В отличие от активного сопротивления на конденсаторе в цепи переменного тока энергия не выделяется. В течение четверти периода, когда конденсатор заряжается, энергия поступает в цепь. В следующую четверть периода, при разрядке конденсатора, эта энергия возвращается к источнику.

11.10. Переменный электрический ток в цепи, содержащей катушку индуктивности. Индуктивное сопротивление

Рассмотрим вынужденные колебания в цепи, содержащей катушку индуктивности L (рис. 11.7).

В любой момент времени напряжение на катушке есть сумма внешнего напряжения $u(t)$ и ЭДС самоиндукции \mathcal{E}_c , возникающей в катушке при протекании по ней переменного тока.

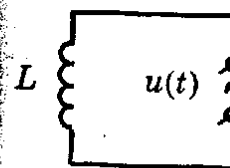


Рис. 11.7

Так как активным сопротивлением катушки пренебрегаем, то

$u(t) + \mathcal{E}_c = 0 \Rightarrow \mathcal{E}_c = -u(t)$. Пусть сила тока в цепи изменяется по гармоническому закону $i(t) = I_m \sin \omega t$, где I_m — амплитудное значение тока. ЭДС самоиндукции в катушке

$\mathcal{E}_c = -Li' = -L(I_m \sin \omega t)' = -L\omega I_m \cos \omega t$. Напряжение на катушке $u = L\omega I_m \cos \omega t = L\omega I_m \sin(\omega t + \pi/2)$.

Следовательно, колебания напряжения на катушке опережают колебания силы тока на $\pi/2$. Амплитуда напряжения $u_m = L\omega I_m \Rightarrow$

$$I_m = \frac{u_m}{L\omega} \quad (11.26)$$

Эту формулу можно записать в виде

$$I_m = \frac{u_m}{X_L}, \quad (11.27)$$

где

$$X_L = \omega L \quad (11.28)$$

— индуктивное сопротивление катушки. На катушке в цепи переменного тока энергия не выделяется.

Соотношения (11.24) и (11.27) справедливы не только для амплитудных, но и для действующих значений тока и напряжения.

11.11. Метод векторных диаграмм. Мощность переменного тока

Расчет токов и напряжений в более сложных электрических цепях проводят с помощью векторных диаграмм.

Метод векторных диаграмм основан на том, что гармоническое колебание можно задать с помощью вектора, модуль которого равен амплитуде колебания, а угол, который образует вектор с некоторой осью, равен начальной фазе колебаний. Сложение напряжений и токов, изменяющихся по гармоническому закону, сводится к сложению векторов, представляющих колебания напряжений и токов.

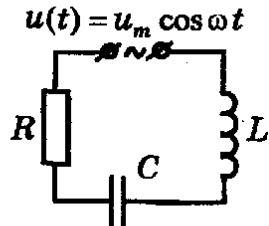


Рис. 11.8

Рассмотрим в качестве примера цепь (рис. 11.8), в которой все элементы включены последовательно, поэтому сила тока в любой момент времени на всех участках цепи одинакова, а сумма мгновенных значений напряжений на них равна значению приложенного напряжения $u(t) = u_m \cos \omega t$.

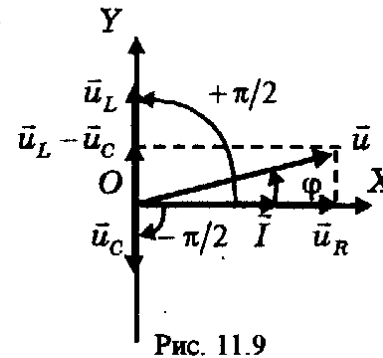


Рис. 11.9

В системе координат XOY зададим вектор колебания тока I координатами по осям OX и OY , т.е. $\vec{I} (I_m; 0)$, где I_m — амплитуда тока. Колебания напряжения на резисторе R совпадают по фазе с колебаниями тока, при этом амплитуда колебаний напряжения $u_m = I_m R$. Вектор $\vec{u}_R (I_m R; 0)$, представляющий колебания напряжения, располагается также вдоль оси OX . Колебания напряжения на конденсаторе отстают от колебаний тока на $\pi/2$, поэтому они представлены вектором \vec{u}_C , расположенным на оси OY (рис. 11.9). Амплитуда напряжения на конденсаторе $u_C = I_m X_C = \frac{I_m}{\omega C}$, поэтому $\vec{u}_C = \vec{u}_C \left(0; -\frac{I_m}{\omega C} \right)$. Колебания напряжения на катушке опережают колебания тока на $\pi/2$, поэтому они представлены вектором \vec{u}_L , направленным вдоль оси OY . Амплитуда колебаний $u_L = I_m X_L = I_m \omega L$. Вектор $\vec{u}_L = \vec{u}_L (0; I_m \omega L)$. Приложенное напряжение $u(t) = u_m \cos \omega t$ можно представить в виде вектора \vec{u} , и поскольку сумма всех напряжений на элементах цепи равна приложенному напряжению, то

$\vec{u} = \vec{u}_R + \vec{u}_C + \vec{u}_L \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{u} = \vec{u} \left(I_m R + 0 + 0; 0 - \frac{I_m}{\omega C} + I_m \omega L \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{u} = \vec{u} \left(I_m R; I_m \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right)$$

Модуль любого вектора равен корню квадратному из суммы квадратов его координат, поэтому

$$u_m = \sqrt{(I_m R)^2 + I_m^2 \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} = I_m \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

Для амплитуды тока I_m получаем формулу:

$$I_m = \frac{u_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} = \frac{u_m}{Z}, \quad (11.29)$$

где $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ — полное

сопротивление цепи переменному току.

Геометрический метод построения вектора \vec{u} приведен на рис. 11.9. Из построения следует, что между колебаниями внешнего напряжения и колебаниями тока в цепи существует разность фаз, причем, как это следует из рис. 11.9,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{u_L - u_C}{u_R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \frac{X_L - X_C}{R}. \quad (11.30)$$

Таким образом, если приложенное напряжение $u(t) = u_m \cos \omega t$, то сила тока в цепи $i(t) = I_m \cos(\omega t - \varphi)$, напряжение на конденсаторе $u_C(t) = \frac{I_m}{\omega C} \cos(\omega t - \varphi - \pi/2)$, напряжение на катушке $u_L(t) = I_m \omega L \cos(\omega t - \varphi + \pi/2)$.

При некотором значении частоты внешнего напряжения $\omega = \omega_0$ реактивные сопротивления катушки и конденсатора становятся одинаковыми, т.е.

$$X_C = X_L \Rightarrow \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

В этом случае амплитуда колебаний тока в цепи максимальна и в соответствии с формулой (11.29) равна $I_m = \frac{u_m}{R}$. При этом амплитуда колебаний напряжения на конденсаторе

$$\frac{I_m}{\omega_0 C} = I_m \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad \text{амплитуда напряжения на катушке}$$

$$I_m \omega_0 L = I_m \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad \text{Другими словами, указанные амплитуды}$$

становятся равными. Так как напряжения на конденсаторе и катушке колеблются в противоположных фазах, то их сумма в любой момент времени равна нулю. Следовательно, напряжение на активном сопротивлении R равно приложенному внешнему напряжению. Сдвиг фаз между током и напряжением в соответствии с формулой (11.30) $\varphi = 0$.

Найдем мгновенную мощность, выделяющуюся в цепи переменного тока:

$$\begin{aligned} p(t) &= i(t)u(t) = I_m \cos(\omega t - \varphi) u_m \cos \omega t = \\ &= I_m u_m \cos(\omega t - \varphi) \cos \omega t = I_m u_m \cdot \frac{1}{2} (\cos(2\omega t - \varphi) + \cos \varphi) = \\ &= \frac{1}{2} I_m u_m \cos \varphi + \frac{1}{2} I_m u_m \cos(2\omega t - \varphi). \end{aligned}$$

Средняя мощность за

период T : $\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$. Проведя преобразования, получим, что

$$\bar{P} = \frac{1}{2} I_m u_m \cos \varphi.$$

Подставляя действующие значения тока и напряжения, приходим к формуле

$$\bar{P} = I_A u_A \cos \varphi \quad (11.31)$$

где $\cos \varphi$ — сдвиг фаз между током и напряжением, который называют коэффициентом мощности.

11.12. Трансформатор

Трансформатор передает электрическую энергию из одной цепи в другую и при этом преобразовывает величины токов и напряжений. Работа трансформатора основана на явлении элек-

ромагнитной индукции, поэтому он может работать только на переменном токе.

Трансформатор состоит из замкнутого ферромагнитного сердечника, на который намотаны две или больше катушки (обмотки трансформатора). Одна из них, первичная, подключается к источнику переменного напряжения, другая, вторичная, – к нагрузке. При прохождении переменного тока по первичной обмотке в сердечнике появляется переменный магнитный поток, что приводит к возникновению ЭДС индукции во вторичной обмотке. Если первичная обмотка содержит N_1 , а вторичная – N_2 витков, то $\frac{\mathcal{E}_1(t)}{\mathcal{E}_2(t)} = \frac{N_1}{N_2}$, где \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 – ЭДС индукции, возникающие в обмотках. В идеальном трансформаторе активным сопротивлением обмоток можно пренебречь, поэтому $|\mathcal{E}_1(t)| = |u_1(t)|$, где $u_1(t)$ – напряжение, подаваемое на первичную обмотку. При разомкнутой цепи вторичной обмотки (режим холостого хода) $|\mathcal{E}_2(t)| = |u_2(t)|$, где $u_2(t)$ – напряжение на концах вторичной обмотки. Отсюда следует, что $\frac{u_1(t)}{u_2(t)} = \frac{N_1}{N_2}$.

Переходя к действующим значениям напряжения, получим

$$\frac{u_{д1}}{u_{д2}} = \frac{N_1}{N_2} = k \quad (11.32)$$

Коэффициент k называется коэффициентом трансформации, причем при $k > 1$ – трансформатор понижающий, при $k < 1$ – повышающий.

При подключении нагрузки к концам вторичной обмотки в ее цепи возникает переменный ток. Если не учитывать потери энергии на выделение тепла не только в обмотках, но и в сердечнике, то мощность тока в первичной и вторичной обмотках одинаковы:

$$u_{д1} I_{д1} = u_{д2} I_{д2}, \quad (11.33)$$

где $u_{д1}, I_{д1}, u_{д2}, I_{д2}$ – действующие значения токов и напряжений.

11.13. Примеры решения задач

Задача 11.1. Грузик на пружине колеблется вдоль прямой с амплитудой $A = 2$ см и периодом $T = 2$ с. В начальный момент времени грузик проходил положение равновесия. Определить скорость и ускорение грузика через $t_1 = 0,25$ с, трения нет.

Решение.

Так как трения нет, то грузик совершает гармонические колебания, уравнение которых

$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi_0\right)$, где φ_0 – начальная фаза колебаний. По условию задачи при $t = 0$ $x = 0$. Тогда $A \sin \varphi_0 = 0 \Rightarrow \varphi_0 = 0$. Окончательно уравнение колебаний грузика записывается в виде: $x(t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$. Мгновенная ско-

рость $v(t) = x'(t) = \left(A \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right)\right)' = \frac{2\pi}{T} A \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$.

В момент времени $t = t_1$

$$v(t_1) = \frac{2\pi}{T} A \cos\left(\frac{2\pi}{T} t_1\right) = 6,28 \cdot 10^{-2} \cos \frac{\pi}{4} = 4,4 \cdot 10^{-2} \text{ м/с.}$$

Ускорение грузика в любой момент времени

$$a(t) = v'(t) = \left(\frac{2\pi}{T} A \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right)\right)' = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right).$$

В момент времени $t = t_1$

$$a(t_1) = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A \sin\left(\frac{2\pi}{T} t_1\right) = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A \sin \frac{\pi}{4} = -13,9 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}^2$$

Задача 11.2. Скорость тела, совершающего гармонические колебания, изменяется по закону: $v = 10^{-1} \sin 100t$ м/с. Составить уравнение гармонических колебаний тела и определить максимальное значение его ускорения. Начальную фазу считать равной нулю.

Решение.

Как известно, скорость $v(t)$ есть производная от координаты $x(t)$. Поэтому, если $v(t) = 10^{-1} \sin 100t$, то координата является первообразной от скорости и равна $x(t) = \int v(t) dt + C$, где C – произвольная константа. Для ее определения необходимо задать координату в момент времени $t = 0$. Поскольку это условие в задаче отсутствует, будем считать, что при $t = 0$ $x = x_0 = 0$, т.е. тело находится в начале координат. Итак, $x(t) = \int 10^{-1} \sin 100t dt + C = -10^{-3} \cos 100t + C$ м. Используя начальные условия, получаем: $0 = -10^{-3} + C \Rightarrow C = 10^{-3}$ м. Уравнение гармонических колебаний тела запишется в виде:

$$x(t) = (-10^{-3} \cos 100t + 10^{-3}) \text{ м.}$$

Ускорение тела есть производная от скорости:

$a(t) = v'(t) = (10^{-1} \sin 100t)' = 10 \cos 100t$ м/с². Ускорение также совершает гармонические колебания с амплитудой $a_m = 10$ м/с². Максимальное значение ускорения равно амплитуде, т.е. $a_m = 10$ м/с².

Задача 11.3. Точка совершает гармонические колебания вдоль некоторой прямой с периодом $T = 0,6$ с и амплитудой $A = 10$ см. Найти среднюю скорость точки за время, в течение которого она проходит путь $A/2$

1) из положения равновесия; 2) из крайнего положения.

Решение.

Запишем уравнение гармонических колебаний точки:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi_0\right), \text{ где } \varphi_0 - \text{ начальная}$$

фаза колебаний. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ точка находится в начале координат $x_0 = 0$. Тогда для определения начальной фазы колебаний получаем уравнение

$$A \sin \varphi_0 = 0 \Rightarrow \varphi_0 = 0. \text{ Следовательно, } x(t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right).$$

Пусть в момент времени $t = t_1$ после прохождения начала координат точка имеет координату $x(t_1) = \frac{A}{2}$. Определяем время t_1 :

$$\frac{A}{2} = A \sin\left(\frac{2\pi}{T} t_1\right) \Rightarrow \sin\left(\frac{2\pi}{T} t_1\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} t_1 = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t_1 = \frac{T}{12}.$$

Время движения из точки с координатой $x_0 = 0$ до точки с координатой $x = A$ составляет $T/4$, поэтому время движения из точки с координатой $x = A/2$ до точки с координатой $x = A$

$$t_2 = \frac{T}{4} - t_1 = \frac{T}{4} - \frac{T}{12} = \frac{T}{6}.$$

Средняя скорость на первом участке пути

$$v_1 = \frac{S_1}{t_1} = \frac{A/2}{T/12} = \frac{6A}{T} = 0,1 \text{ м/с.}$$

Средняя скорость на втором участке пути

$$v_2 = \frac{S_2}{t_2} = \frac{A/2}{T/6} = \frac{3A}{T} = 0,5 \text{ м/с.}$$

Задача 11.4. Груз лежит на платформе, совершающей горизонтальные колебания с частотой $\nu = 2$ Гц и амплитудой $A = 1$ см. Будет ли груз скользить по платформе, если коэффициент трения груза о платформу равен 0,2?

Решение.

Пусть груз покоится относительно платформы, совершая вместе с ней гармонические колебания, задаваемые формулой

$$x(t) = A \sin 2\pi \nu t. \text{ Скорость груза } v(t) = x'(t) = (A \sin 2\pi \nu t)' = 2\pi \nu A \cos 2\pi \nu t. \text{ Ускорение груза } a(t) = v'(t) = (2\pi \nu A \cos 2\pi \nu t)' = -(2\pi \nu)^2 A \sin 2\pi \nu t = (2\pi \nu)^2 A \sin(2\pi \nu t + \pi) = a_m \sin(2\pi \nu t + \pi), \text{ где}$$

$a_m = (2\pi\nu)^2 A$ – амплитуда. Ясно, что эта величина есть максимальное значение ускорения, которым обладает груз, совершающий колебания вместе с платформой.

В вертикальном направлении на груз действуют: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции \vec{N} со стороны платформы, причем $N - mg = 0 \Rightarrow N = mg$. Ускорение груза вызвано действием на него в горизонтальном направлении силы трения покоя со стороны платформы. По второму закону Ньютона $F_{\text{тр}}(t) = ma(t)$. Максимальное значение силы трения покоя соответствует максимальному значению ускорения $F_m = ma_m$. Если груз относительно платформы покоится, то $F_m < \mu N \Rightarrow ma_m < \mu mg \Rightarrow (2\pi\nu)^2 A < \mu g$. Подставив числовые значения, проверим справедливость полученного неравенства: $(2 \cdot 3,14 \cdot 2)^2 \cdot 10^{-2} < 0,2 \cdot 9,8 \Rightarrow 1,58 < 1,96$. Груз по платформе скользить не будет.

Задача 11.5. Определить период колебания тела массой m , подвешенного вертикально на пружине с коэффициентом жесткости k (рис. 11.10).

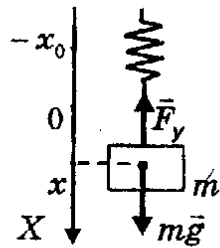


Рис. 11.10

Решение.

Пусть груз находится в равновесии. К нему приложены: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила упругости пружины \vec{F}_y , модуль которой равен kx_0 , где $x_0 > 0$ – модуль деформации пружины. Из условия равновесия получаем уравнение

$$mg - kx_0 = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{mg}{k} (*)$$

Поместим начало координат оси X в точку, соответствующую положению равновесия груза, тогда при колебаниях в любой момент времени деформация пружины равна $x + x_0$, где x – текущая координата, и, следовательно, проекция силы упругости на ось X $F_x = -k(x + x_0)$. По второму закону Ньютона полу-

чим $m\vec{g} + \vec{F}_y = m\vec{a}$, а для проекций на ось X $mg - k(x + x_0) = ma_x$. Учитывая, что ускорение есть вторая производная от координаты $a_x = x''$, получаем

$$mg - k(x + x_0) = mx'' \Rightarrow mg - kx_0 = mx'' + kx.$$

В соответствии с равенством (*) $mg - kx_0 = 0$, поэтому

$$mx'' + kx = 0 \Rightarrow x'' + \frac{k}{m}x = 0 \Rightarrow x'' + \omega_0^2 x = 0, \text{ где } \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

Таким образом, получили уравнение гармонических колебаний. Следовательно, собственная частота колебаний груза

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \text{ а период колебаний } T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Как видно, частота и период колебаний груза на вертикальной пружине оказываются такими же, как и при колебаниях на горизонтальной плоскости.

Задача 11.6. Чашка пружинных весов массой m_1 совершает вертикальные гармонические колебания с амплитудой A . Когда чашка находилась в крайнем нижнем положении, на нее положили груз массой m_2 . В результате колебания прекрати-



Рис. 11.11

лись. Определить первоначальный период колебаний чашки (рис. 11.11).

Решение.

Первоначально колебания чашки происходят с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}}, \text{ где } k \text{ – коэффициент жесткости пружины. При этом}$$

чашка колеблется около положения равновесия, в котором пружина деформирована на

$$x_0 = \frac{m_1 g}{k} \text{ (см. задачу 11.5).}$$

При гармонических колебаниях чашки в крайнем нижнем положении ее скорость равна нулю, а модуль ускорения максимален. Однако, когда на чашку положили дополнительный груз и колебания прекратились, ускорение груза обратилось в ноль. По второму закону Ньютона получаем уравнение

$$F_y - (m_1 + m_2)g = 0, \text{ где модуль силы упругости}$$

$$F_y = k(x_0 + A). \text{ После подстановки получаем}$$

$$k(x_0 + A) - (m_1 + m_2)g = 0 \Rightarrow kx_0 + kA - m_1g - m_2g = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow kA = m_2g \Rightarrow k = \frac{m_2g}{A}.$$

Подставляя k в формулу для периода колебаний, находим

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1g}{m_2A}}.$$

Задача 11.7. Вагон движется на пружинный упор со скоростью v . В момент, когда скорость вагона обратилась в ноль, пружина сжалась на l . Определить, за какое время это произошло.

Решение.

Начальная механическая энергия вагона $W_1 = \frac{mv^2}{2}$, где m – масса вагона. В тот момент, когда скорость вагона обратилась в ноль, его механическая энергия $W_2 = \frac{kl^2}{2}$. По закону сохранения механической энергии

$$W_1 = W_2 \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = \frac{kl^2}{2} \Rightarrow \frac{m}{k} = \frac{l^2}{v^2}.$$

Движение вагона при его торможении на пружинном упоре можно считать гармоническими колебаниями с периодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \frac{l}{v}. \text{ При гармонических колебаниях скорость}$$

обращается в ноль через $\frac{1}{4}T$ после прохождения положения

$$\text{равновесия, поэтому искомое время } t_x = \frac{1}{4}T = \frac{\pi l}{2v}.$$

Задача 11.8. На вертикально расположенной пружине с коэффициентом жесткости k подвешен груз массой m . Грузу сообщают начальную скорость v , направленную вертикально вниз. Определить период и амплитуду колебаний груза (рис.11.10).

Решение.

В задаче 11.5 было показано, что груз в вертикальном направлении совершает гармонические колебания с периодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \text{ Колебания происходят относительно нового равновесного положения } x_0 = \frac{mg}{k}.$$

Найдем амплитуду колебаний.

В положении равновесия груз обладает кинетической энергией $W_{к1} = \frac{mv_0^2}{2}$ и потенциальной энергией упругой деформации

$$W_{y1} = \frac{kx_0^2}{2}. \text{ Нулевое значение потенциальной энергии в поле тяжести выберем на уровне, соответствующем положению равновесия, т.е. } W_{p1} = 0. \text{ Полная механическая энергия тела}$$

$$W_1 = W_{к1} + W_{y1} + W_{p1} = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{kx_0^2}{2}.$$

Пусть тело отклонилось от положения равновесия вниз на расстояние, равное амплитуде колебаний, тогда $v = 0$ и кинетическая энергия тела $W_{к2} = 0$. Потенциальная энергия упругой

$$\text{деформации } W_{y2} = \frac{k(x_0 + A)^2}{2}, \text{ а потенциальная энергия в по}$$

ле тяжести $W_{p2} = -mgA$. Полная механическая энергия

$$W_2 = W_{k2} + W_{y2} + W_{p2} = \frac{k(x_0 + A)^2}{2} - mgA.$$

По закону сохранения энергии

$$W_1 = W_2 \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} + \frac{kx_0^2}{2} = \frac{k(x_0 + A)^2}{2} - mgA \Rightarrow$$

$$\Rightarrow mv_0^2 + kx_0^2 = kx_0^2 + 2kx_0A + kA^2 - 2mgA.$$

Учитывая, что $x_0 = \frac{mg}{k}$, находим $2kx_0A = 2mgA$. В итоге

$$\text{приходим к уравнению } kA^2 - mv_0^2 = 0 \Rightarrow A = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Задача 11.9. На горизонтальной пружине укреплено тело массой $M = 10$ кг, лежащее на абсолютно гладком столе. В это тело попадает и застревает в нем пуля массой $m = 10$ г, летящая со скоростью $v = 500$ м/с, направленной вдоль оси пружины. Амплитуда возникших при этом колебаний $A = 0,1$ м. Найти период колебаний. Как будут изменяться координата и скорость при колебаниях? (Рис. 11.12).

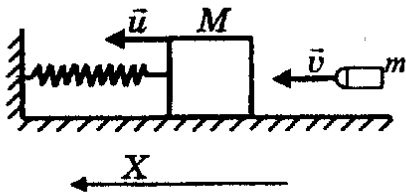


Рис. 11.12

в направлении X начальный импульс системы «тело-пуля» равен mv , а конечный импульс (сразу после попадания пули) — $(M + m)u$. По закону сохранения импульса

$$mv = (M + m)u \Rightarrow u = \frac{mv}{m + M}.$$

После попадания пули механическая энергия системы $W_1 = \frac{(M + m)u^2}{2}$. При отклонении тела на расстояние, равное амплитуде A , скорость тела обращается в ноль, и механическая

энергия системы W_2 равна потенциальной энергии упругой деформации, т.е. $W_2 = \frac{kA^2}{2}$, где k — коэффициент жесткости пружины. Так как трения нет, то механическая энергия при колебаниях сохраняется: $W_1 = W_2 \Rightarrow \frac{(M + m)u^2}{2} = \frac{kA^2}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow k = \frac{(M + m)u^2}{A^2} = \frac{(M + m)(mv/(M + m))^2}{A^2} = \frac{(mv)^2}{A^2(M + m)}.$$

$$\text{Период колебаний } T = 2\pi \sqrt{\frac{M + m}{k}} = \frac{2\pi}{A} \left(\frac{M + m}{mv} \right) = 1,26 \text{ с.}$$

Если начало координатной оси X поместить в точку, где в момент начала колебаний находилось тело, то координата и скорость его будут изменяться по гармоническому закону от времени и выражаться формулами:

$$x(t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad \text{и} \quad v(t) = \frac{2\pi}{T} A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right).$$

Эти результаты были получены в задаче 11.1.

Задача 11.10. Однородную по длине пружину с жесткостью k разрезали на две части так, что отношение их длин равно n .

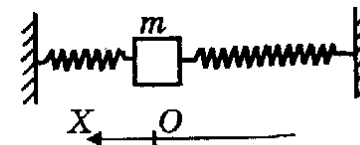


Рис. 11.13

С помощью двух получившихся пружин небольшое тело массой m закрепили между двумя стенками так, что обе пружины оказались недеформированными. Пренебрегая массой пружин и силой тяжести, найти период малых колебаний данного тела. Трением пренебречь (рис. 11.13).

Решение.

Пусть l_1 и l_2 — длины образовавшихся пружин, а l — длина всей пружины, тогда $l_1/l_2 = n$. Найдем коэффициенты жесткости каждой пружины. Известно, что коэффициент жесткости вы-

ражается формулой $k = \frac{ES}{l}$, где E – модуль Юнга, S – площадь сечения пружины, l – ее длина (см. главу 2). Следовательно, $\frac{k_1}{k_2} = \frac{l_2}{l_1} = \frac{1}{n}$ (1).

Кроме того, $\frac{k}{k_1} = \frac{l_1}{l}$ и $\frac{k}{k_2} = \frac{l_2}{l}$. После сложения этих равенств

получим $\frac{k}{k_1} + \frac{k}{k_2} = \frac{l_1}{l} + \frac{l_2}{l} = 1 \Rightarrow k \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \quad (2). \quad (\text{Формула для последовательного соединения пружин.})$$

Уравнения (1) и (2) образуют систему

$$\begin{cases} \frac{k_1}{k_2} = \frac{1}{n}, \\ \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} = k, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_2 = n k_1, \\ \frac{k_1^2 n}{k_1 + n k_1} = k, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = \frac{k(1+n)}{n}, \\ k_2 = k(1+n). \end{cases}$$

Поместим начало координатной оси X в точку, соответствующую положению равновесия тела (рис. 11.13). При смещении тела, например, влево на него будут действовать силы упругости, направленные вправо. (Поэтому проекции этих сил отрицательны.) По второму закону Ньютона

$$-k_1 x - k_2 x = m x'' \Rightarrow m x'' + (k_1 + k_2)x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x'' + \frac{k_1 + k_2}{m} x = 0 \Rightarrow x'' + \omega_0^2 x = 0, \quad \text{где } \omega_0^2 = \frac{k_1 + k_2}{m}.$$

Получили уравнение гармонических колебаний с частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}. \quad \text{Следовательно, период колебаний } T = \frac{2\pi}{\omega_0} =$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k \frac{1+n}{n} + k(1+n)}} = 2\pi \sqrt{\frac{mn}{k(1+n)^2}} =$$

$$= \frac{2\pi}{1+n} \sqrt{\frac{n}{k}} m.$$

Задача 11.11. На какую часть длины надо уменьшить длину математического маятника, чтобы период колебаний маятника на высоте 10 км был равен периоду его колебаний на поверхности Земли? Радиус Земли $R_3 = 6400$ км.

Решение.

Период колебаний математического маятника длиной l на поверхности Земли равен $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$. Известно, что ускорение

свободного падения на поверхности Земли равно $g = \frac{GM_3}{R_3^2}$, где

G – гравитационная постоянная, а M_3 – масса Земли. С увеличением расстояния от поверхности Земли ускорение свободного падения уменьшается, и на высоте $h = 10$ км оно равно $g_1 = \frac{GM_3}{(R_3 + h)^2}$. Для того, чтобы период колебаний остался не-

изменяемым, надо уменьшить длину маятника, сделав ее l_1 . Тогда

период колебаний будет равен $T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l_1}{g_1}}$. Так как по условию

задачи $T_1 = T$, то $\frac{l_1}{g_1} = \frac{l}{g} \Rightarrow l_1 = l \frac{g_1}{g}$. Уменьшение длины ни-

ти $l - l_1 = l \left(1 - \frac{g_1}{g} \right)$, и искомое отношение

$$\frac{l - l_1}{l} = 1 - \frac{g_1}{g} = 1 - \left(\frac{R_3}{R_3 + h} \right)^2 = 3 \cdot 10^{-3}.$$

Задача 11.12. Математический маятник длиной l совершает колебания вблизи вертикальной стенки. Под точкой подвеса

маятника, на расстоянии $l/2$ от нее по вертикали, в стене забит гвоздь. Найти период T колебаний маятника (рис. 11.14).

Решение.

На участке AO маятник совершает колебания на нити длиной l .

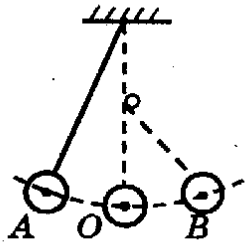


Рис. 11.14

Период таких колебаний $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, а время, затрачиваемое на

прохождение дуги AO , $t_1 = \frac{1}{4}T_1$. На участке OB маятник совершает колебания на нити длиной $l/2$ с периодом

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{(l/2)}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}, \quad \text{при-}$$

чем время прохождения участка OB $t_2 = \frac{1}{4}T_2$. Пусть T — истинный период колебаний маятника, тогда

$$T = \frac{1}{4}T_1 + \frac{1}{4}T_2 = \frac{1}{4}(T_1 + T_2) \Rightarrow$$

$$T = \frac{1}{2}(T_1 + T_2) = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Задача 11.13. При какой скорости поезда маятник длиной $l = 20$ см, подвешенный в вагоне, особенно сильно раскачивается, если расстояние между стыками рельсов $L = 20$ м?

Решение.

При прохождении колесами стыков на вагон и на маятник действует внешняя сила. Ее период равен времени прохождения погонным расстоянием между стыками, т.е. $T = L/v$, где v — скорость поезда. Частота колебаний этой внешней силы $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\frac{v}{L}$. Собственная частота колебаний маятника

$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Маятник особенно сильно раскачивается, когда наступает резонанс:

$$\omega = \omega_0 \Rightarrow 2\pi\frac{v}{L} = \sqrt{\frac{g}{l}} \Rightarrow v = \frac{L}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} = 22,3 \text{ м/с} \approx 80 \text{ км/ч}.$$

Задача 11.14. В сообщающихся сосудах цилиндрической формы налита ртуть. Найти период малых колебаний ртути, если

площадь поперечного сечения каждого сосуда $S = 0,3 \text{ см}^2$, а масса ртути $m = 484 \text{ г}$. Плотность ртути $\rho = 13,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$. Трением пренебречь (рис. 11.15).

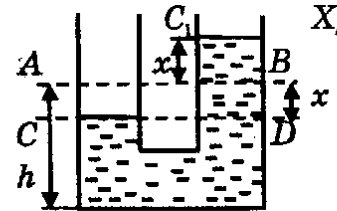


Рис. 11.15

Пусть в равновесии свободные поверхности ртути находятся на уровне AB . Если в левом сосуде ртуть опускается на расстояние x ($x \ll h$), то в правом она поднимается на такую же высоту x . Силы тяжести столбиков до уровня CD одинаковы, значит, на ртуть действует возвращающая сила тяжести столбика ртути C_1D массой $m_1 = \rho V = \rho S \cdot 2x$. Из-за малости x можем считать, что возвращающая сила m_1g приложена ко всей массе жидкости m . Второй закон Ньютона запишется в виде

$$-\rho S \cdot 2xg = ma \Rightarrow -\rho S \cdot 2xg = mx'' \Rightarrow x'' + \frac{2\rho Sg}{m}x = 0.$$

Пусть $\omega_0^2 = \frac{2\rho Sg}{m}$, тогда уравнение примет вид: $x'' + \omega_0^2x = 0$, т.е. получаем уравнение гармонических колебаний с собственной

частотой $\omega_0 = \sqrt{\frac{2\rho Sg}{m}}$ и периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2\rho Sg}} = 1,54 \text{ с}.$$

Задача 11.15. Тонкое проволочное кольцо радиусом R имеет электрический заряд $Q > 0$. Как будет двигаться точечный заряд массой m , имеющий заряд $(-q)$ ($q > 0$), если в начальный момент времени он покоился в некоторой точке на оси кольца на расстоянии $d \ll R$ от его центра? Кольцо неподвижно.

Решение.

Кольцо притягивает к себе заряд $(-q)$. Пусть в некоторый момент времени заряд находится на расстоянии $x < d \ll R$ от центра кольца и его скорость при этом $v = x'$. Кинетическая энергия заряда $\frac{mv^2}{2} = \frac{m(x')^2}{2}$. Его потенциальная энергия — это потенциальная энергия в электростатическом поле кольца, равная $(-q)\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — потенциал, создаваемый кольцом в точке расположения заряда. В главе 8 было показано, что потенциал, создаваемый заряженным кольцом, равен

$\varphi(x) = k \frac{Q}{\sqrt{R^2 + x^2}}$, где $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9$ (Н·м²)/Кл². Следовательно, потенциальная энергия заряда равна $-k \frac{qQ}{\sqrt{R^2 + x^2}}$. Полная энергия заряда складывается из его кинетической и потенциальной энергий: $W = \frac{m(x')^2}{2} - k \frac{qQ}{\sqrt{R^2 + x^2}}$. Отметим, что эта энергия в процессе движения заряда не изменяется, т.е. $W = \text{const}$.

Найдем производную от полной энергии заряда по времени:

$$W' = \left(\frac{m(x')^2}{2} - k \frac{qQ}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right)' = \frac{m}{2} \cdot 2x' \cdot x'' - kqQ \left(-\frac{1}{2} \right) (R^2 + x^2)^{-3/2} \cdot 2x \cdot x' =$$

$$= \left(mx'' + kqQ \frac{x}{\sqrt{(R^2 + x^2)^3}} \right) x'. \text{ Так как } W = \text{const}, \text{ то } W' = 0, \text{ и после сокращения на } x' \text{ получаем}$$

$$mx'' + kqQ \frac{x}{\sqrt{(R^2 + x^2)^3}} = 0 \quad (*).$$

Отметим, что $\sqrt{(R^2 + x^2)^3} = \sqrt{\left(R^2 \left(1 + \frac{x^2}{R^2} \right) \right)^3}$. Так как

$x \ll R$, то отношение $\left(\frac{x}{R} \right)^2 \rightarrow 0$, и в этом приближении уравнение (*) приводится к виду

$$mx'' + kqQ \frac{x}{R^3} = 0 \Rightarrow x'' + \frac{kqQ}{mR^3} x = 0 \Rightarrow x'' + \omega_0^2 x = 0, \text{ где}$$

$\omega_0^2 = \frac{kqQ}{mR^3} > 0$. Мы получили уравнение гармонических колебаний заряда, происходящих с частотой $\omega_0 = \sqrt{\frac{kqQ}{mR^3}}$ и перио-

$$\text{дом } T = 2\pi \sqrt{\frac{mR^3}{kqQ}}.$$

Задача 11.16. Проводник массой m и длиной l подвешен к диэлектрику с помощью двух одинаковых проводящих пружин

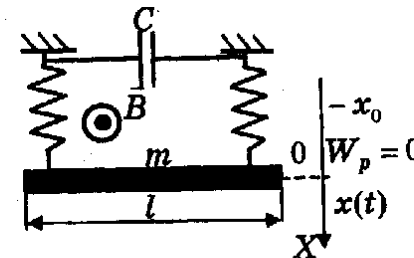


Рис. 11.16

с общей жесткостью k . Однородное магнитное поле с индукцией B направлено перпендикулярно плоскости чертежа (рис. 11.16). К верхним концам пружины присоединен конденсатор емкостью C . Пренебрегая сопротивлени-

ем, собственной индуктивностью и емкостью проводников, определить период колебаний системы в вертикальной плоскости.

Решение.

При равновесии проводника $mg - kx_0 = 0$, где $x_0 = \frac{mg}{k}$

– начальная деформация пружин. Выберем ось координат X , направленную вертикально вниз. Ее начало поместим в точке, соответствующей положению равновесия, тогда в любой момент времени деформация пружин равна $(x + x_0)$, где x – координата проводника. При колебаниях полная энергия системы складывается из:

1) кинетической энергии проводника $W_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m(x')^2}{2}$;

2) потенциальной энергии проводника в поле тяжести Земли $W_p = -mgx$ (нулевое значение потенциальной энергии соответствует положению равновесия проводника, т.е. когда проводник находится в начале координат);

3) потенциальной энергии упругой деформации пружин $W_y = \frac{k(x + x_0)^2}{2}$;

4) электростатической энергии конденсатора $W_3 = \frac{Cu^2}{2}$, где u – напряжение на конденсаторе.

Так как проводник движется в магнитном поле, то на его концах возникает ЭДС индукции $\mathcal{E}_i = Blv = Blx'$. Поскольку сопротивлением проводника и пружинок можно пренебречь, то в любой момент времени напряжение на конденсаторе равно ЭДС индукции, т.е. $u = \mathcal{E}_i$. Следовательно, $W_3 = \frac{C(Blx')^2}{2}$.

Полная энергия системы $W = W_k + W_p + W_y + W_3 =$

$$= \frac{m(x')^2}{2} - mgx + \frac{k(x + x_0)^2}{2} + \frac{C(Blx')^2}{2}$$

Вычислим производную от полной энергии по времени:

$$W' = \frac{m}{2} \cdot 2x' \cdot x'' - mgx' + \frac{k}{2} \cdot 2(x + x_0)x' + \frac{C(Bl)^2}{2} \cdot 2x' \cdot x'' =$$

$$= mx'x'' - mgx' + k(x + x_0)x' + C(Bl)^2 x'x'' =$$

$$= \left((m + C(Bl)^2)x'' + kx - (mg - kx_0) \right) x'$$

Напомним, что $mg - kx_0 = 0$, поэтому

$$W' = \left((m + C(Bl)^2)x'' + kx \right) x'$$

Полная энергия системы сохраняется, т.е. $W = \text{const}$, следовательно, $W' = 0$. Подставляя и сокращая на x' , получаем уравнение $(m + C(Bl)^2)x'' + kx = 0 \Rightarrow x'' + \frac{k}{m + C(Bl)^2}x = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x'' + \omega_0^2 x = 0, \text{ где } \omega_0^2 = \frac{k}{m + C(Bl)^2}$$

Итак, проводник совершает гармонические колебания с частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m + C(Bl)^2}} \text{ и периодом } T = 2\pi \sqrt{\frac{m + C(Bl)^2}{k}}$$

Задача 11.17. Конденсатор емкостью $C = 50$ пФ сначала подключили к источнику тока с ЭДС $\mathcal{E} = 3$ В, а затем к катушке с индуктивностью $L = 5,1$ мкГн. Найти: частоту колебаний, возникших в контуре, максимальное значение силы тока в контуре и его действующее значение (рис. 11.17).

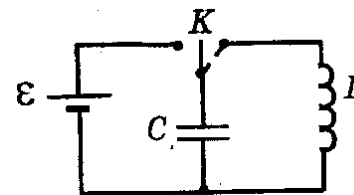


Рис. 11.17

Решение.

На рис. 11.17 K – ключ, при помощи которого конденсатор C подключают к источнику ЭДС. При этом конденсатор заряжается до напряжения $u = \mathcal{E}$ и его заряд $q_m = C\mathcal{E}$. Затем при помощи ключа заряженный конденсатор подключают к катушке. В колебательном контуре возникают колебания заряда, тока и напряже-

ния на конденсаторе. Собственная частота колебаний

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 6,3 \cdot 10^7 \text{ Гц.}$$

Определить максимальное значение тока можно двумя способами.

1. Так как в контуре возникают гармонические колебания, то $q(t) = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, где φ_0 – начальная фаза колебаний. В момент времени $t = 0$

$$q(t) = q(0) = q_m = q_m \cos \varphi_0 \Rightarrow \cos \varphi_0 = 1 \Rightarrow \varphi_0 = 0.$$

Итак, колебания заряда конденсатора описываются формулой

$$q(t) = q_m \cos \omega_0 t. \text{ Ток в контуре } i(t) = q'(t) = (q_m \cos \omega_0 t)' = -q_m \omega_0 \sin \omega_0 t = q_m \omega_0 \cos(\omega_0 t + \pi/2).$$

Отсюда следует, что амплитуда тока $I_m = q_m \omega_0 = C\varepsilon \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}} = \varepsilon \sqrt{\frac{C}{L}} = 9,4 \cdot 10^{-3} \text{ А.}$

2. Начальная энергия контура сосредоточена в электростатическом поле конденсатора и равна $W_1 = \frac{C\varepsilon^2}{2}$. В тот момент, когда ток максимален, заряд конденсатора равен нулю, вся энергия контура сосредоточена в катушке и равна $W_2 = \frac{LI_m^2}{2}$. По закону сохранения энергии

$$W_1 = W_2 \Rightarrow \frac{C\varepsilon^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2} \Rightarrow I_m = \varepsilon \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Действующее значение тока

$$I_d = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \varepsilon \sqrt{\frac{C}{2L}} = 8,6 \cdot 10^{-3} \text{ А.}$$

Задача 11.18. Заряженный конденсатор замкнули на катушку индуктивности. Через какую часть периода после подключения энергия в конденсаторе будет равна энергии в катушке индуктивности?

Решение.

Пусть C – емкость, L – индуктивность, ω_0 – собственная частота контура. В задаче 11.17 было показано, что заряд на конденсаторе изменяется по закону $q(t) = q_m \cos \omega_0 t$, поэтому его энергия в любой момент времени

$$W_3 = \frac{(q(t))^2}{2C} = \frac{q_m^2 \cos^2 \omega_0 t}{2C}.$$

Ток в контуре $i(t) = -q_m \omega_0 \sin \omega_0 t$, а энергия, сосредоточенная в магнитном поле катушки

$$W_m = \frac{Li^2}{2} = \frac{Lq_m^2 \omega_0^2 \sin^2 \omega_0 t}{2}.$$

По условию задачи $W_3 = W_m \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{q_m^2 \cos^2 \omega_0 t}{2C} = \frac{Lq_m^2 \omega_0^2 \sin^2 \omega_0 t}{2} \Rightarrow \cos^2 \omega_0 t = LC\omega_0^2 \sin^2 \omega_0 t.$$

Учитывая, что $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, получим $LC\omega_0^2 = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos^2 \omega_0 t = \sin^2 \omega_0 t \Rightarrow \frac{1 + \cos 2\omega_0 t}{2} = \frac{1 - \cos 2\omega_0 t}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cos 2\omega_0 t = 0 \Rightarrow \cos 2\omega_0 t = 0 \Rightarrow 2\omega_0 t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4\pi}{T} t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{T}{8}.$$

Задача 11.19. Колебательный контур через ключ K подключен к источнику ЭДС с некоторым внутренним сопротивлением r (рис. 11.18). Первоначально ключ K замкнут. После установления стационарного режима

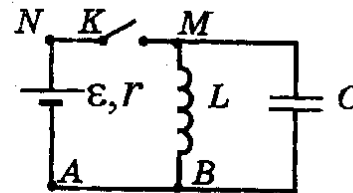


Рис. 11.18

контура ключ размыкают и в контуре возникают колебания с периодом T . При этом амплитуда напряжения на конденсаторе в n раз больше ЭДС батареи. Найти индуктивность катушки и емкость конденсатора. Сопротивлением

катушки можно пренебречь.

Решение.

1. Ключ замкнут. Пусть ЭДС источника равна \mathcal{E} . В стационарном режиме постоянный ток I протекает по контуру $ABMN$ и его значение $I = \frac{\mathcal{E}}{r}$.

2. Ключ разомкнут. В колебательном контуре возникают колебания с периодом $T = 2\pi\sqrt{LC}$ (1). В момент размыкания конденсатор не заряжен, а через катушку протекает ток I , равный амплитудному значению тока при колебаниях: $I_m = I$. При этом вся энергия контура сосредоточена

в магнитном поле катушки и равна $W_m = \frac{LI_m^2}{2}$. В тот момент, когда напряжение на конденсаторе максимально, ток через катушку равен нулю, и вся энергия контура сосредоточена в конденсаторе, т.е. $W_c = \frac{Cu_m^2}{2}$. Так как

$$W_m = W_c \Rightarrow \frac{LI_m^2}{2} = \frac{Cu_m^2}{2} \Rightarrow u_m = I_m \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\text{По условию задачи } \frac{u}{\mathcal{E}} = n \Rightarrow \frac{I_m \sqrt{\frac{L}{C}}}{\mathcal{E}} = n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\mathcal{E}}{r} \sqrt{\frac{L}{C}} = n \Rightarrow nr = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (2).$$

Уравнения (1) и (2) образуют систему

$$\begin{cases} T = 2\pi\sqrt{LC}, \\ nr = \sqrt{\frac{L}{C}}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} LC = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2, \\ \frac{L}{C} = (nr)^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (Cnr)^2 = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2, \\ L = C(nr)^2. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = \frac{T}{2\pi nr}, \text{ а } L = \frac{Tnr}{2\pi}.$$

Задача 11.20. Электрический паяльник мощностью 50 Вт рассчитан на включение в сеть переменного тока с напряжением 127 В. Какая мощность будет выделяться в паяльнике, если его включить в сеть переменного тока с напряжением 220 В последовательно с идеальным диодом? Сопротивление диода при прямом направлении тока считать равным нулю, при обратном — бесконечности. Сопротивление паяльника постоянно.

Решение.

В задаче речь идет о нахождении средней мощности. Данные напряжения есть действующие значения напряжений.

Средняя мощность $\bar{P}_1 = 50$ Вт, на которую

рассчитан паяльник, $\bar{P}_1 = \frac{u_1^2}{R}$, где

$u_1 = 127$ В — действующее значение напряжения. Из последней формулы находим сопротивление паяльника $R = \frac{u_1^2}{\bar{P}_1}$.

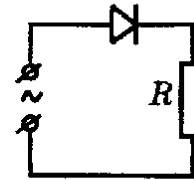


Рис. 11.19

При работе паяльника по схеме на рис. 11.19 действующее значение напряжения $u_2 = 220$ В. При этом в течение первой половины периода через паяльник течет ток, и в нем выделяется

теплота $Q = \bar{P}_2 \cdot \frac{T}{2} = \left(\frac{u_2^2}{R}\right) \cdot \left(\frac{T}{2}\right)$. В течение второй половины

периода ток через паяльник не течет, и теплота не выделяется. Следовательно, средняя мощность за период

$$\bar{P} = \frac{Q}{T} = \frac{\left(\frac{u_2^2}{R}\right) \cdot \left(\frac{T}{2}\right)}{T} = \frac{u_2^2}{2R}. \text{ Подставляя } R, \text{ находим}$$

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \bar{P}_1 \left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2 = 75 \text{ Вт.}$$

Задача 11.21. В цепи (рис. 11.20) $L = 0,1 \text{ Гн}$, $C = 10 \text{ мкФ}$. Частота переменного напряжения, подаваемого на клеммы A и B , $\omega = 10^3 \text{ Гц}$. Найти ток, протекающий через резистор R .

Решение.

Конденсатор и катушка включены параллельно, поэтому в любой момент времени напряжения на них одинаковы. Ток в катушке отстает от напряжения на ней на $\pi/2$, а ток через конденсатор опережает напряжение на $\pi/2$. Пусть вектор $\vec{u}(u_m; 0)$

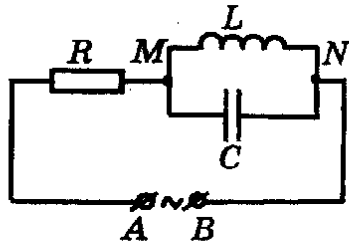


Рис. 11.20

(u_m - амплитудное значение) описывает колебания напряжения между точками M и N . Отложим его по оси X (рис. 11.21).

$\vec{I}_C(0; I_{Cm})$ - вектор, описывающий колебания тока через конденсатор, причем

$$I_{Cm} = \frac{u_m}{X_C} \text{ - амплитудное}$$

значение тока через конденсатор, X_C - емкостное сопротивление конденсатора переменному току.

$\vec{I}_L(0; -I_{Lm})$ - вектор, описывающий колебания тока через катушку, причем

$$I_{Lm} = \frac{u_m}{X_L} \text{ - амплитудное значение}$$

тока через катушку, X_L -

индуктивное сопротивление катушки. Из условия задачи следует, что $X_L = \omega L = 10^3 \cdot 10^{-1} \text{ Ом} = 10^2 \text{ Ом}$ и

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{10^3 \cdot 10^{-5}} \text{ Ом} = 10^2 \text{ Ом, т.е. } X_L = X_C \text{ и } I_{Cm} = I_{Lm}.$$

Так как токи через конденсатор и катушку колеблются в противофазах с одинаковыми амплитудами, то сумма токов через катушку и конденсатор в любой момент времени равна нулю (сум-

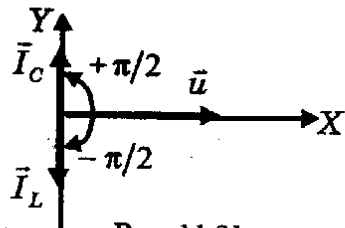


Рис. 11.21

ма векторов $\vec{I}_C + \vec{I}_L = 0$ на рис. 11.21). Итак, общий ток через резистор равен нулю.

Задача 11.22. Определить силу тока в цепи переменного тока (рис. 11.22). Параметры элементов цепи и напряжение источника: R_1, R_2, C, u, ω .

Решение.

В любой момент времени напряжение на конденсаторе C и резисторе R_1 одинаково, так как они соединены параллельно. Это напряжение будем описывать вектором \vec{u}_1 , который расположим вдоль оси X векторной

диаграммы, т.е. $\vec{u}_1 = \vec{u}_1(u_1; 0)$. Колебания тока в резисторе R_1 совпадают по фазе с колебаниями напряжения, их амплитуда

равна $\frac{u_1}{R_1}$, поэтому они описываются вектором $\vec{I}_1 = \vec{I}_1\left(\frac{u_1}{R_1}; 0\right)$.

Колебания тока на конденсаторе опережают колебания напряжения на $\pi/2$, их амплитуда равна

$\frac{u_1}{X_C} = u_1 \omega C$, поэтому они описываются вектором $\vec{I}_C = \vec{I}_C(0; u_1 \omega C)$.

Сложив вектора \vec{I}_1 и \vec{I}_C , найдем вектор \vec{I} , представляющий собой колебания тока в резисторе R_2 , а значит, и во всей цепи (рис. 11.23).

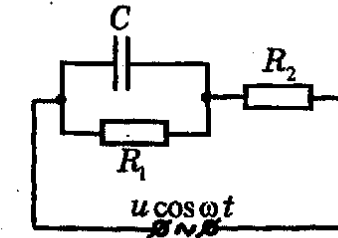


Рис. 11.22

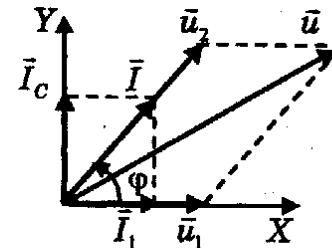


Рис. 11.23

Итак, вектор $\vec{I} = \vec{I}\left(\frac{u_1}{R_1}; u_1 \omega C\right)$, причем модуль тока

$$I = \sqrt{\left(\frac{u_1}{R_1}\right)^2 + (u_1 \omega C)^2} = \frac{u_1}{R_1} \sqrt{1 + (R_1 \omega C)^2} \quad (*) \quad \text{есть}$$

амплитуда колебаний тока через резистор R_2 . Колебания напряжения на R_2 совпадают по фазе с колебаниями тока, их амплитуда равна IR_2 и они описываются вектором $\vec{u}_2 = \vec{I}R_2$. Так как координаты вектора \vec{I} выражены, то

$$\vec{u}_2 = \vec{u}_2 \left(\frac{u_1}{R_1} R_2; u_1 R_2 \omega C \right). \text{ Сумма напряжений } \vec{u}_1 \text{ и } \vec{u}_2, \text{ колеблющихся с разностью фаз } \varphi, \text{ в любой момент времени равна}$$

напряжению во всей цепи \vec{u} , причем модуль вектора \vec{u} равен амплитуде колебаний переменного напряжения. Вектор $(\vec{u}_1 + \vec{u}_2)$ имеет координату по оси X , равную

$$u_{1x} + u_{2x} = u_1 + \frac{u_1}{R_1} R_2 = u_1 \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right). \text{ Его координата по оси}$$

Y равна $u_{1y} + u_{2y} = 0 + u_1 R_2 \omega C = u_1 R_2 \omega C$. Модуль вектора

$$(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \quad u = \sqrt{\left(u_1 \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \right)^2 + (u_1 R_2 \omega C)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_1 = \frac{u}{\sqrt{\left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right)^2 + (R_2 \omega C)^2}}. \text{ Теперь по формуле } (*) \text{ нахо-}$$

дим ток:

$$I = \frac{u}{R_1} \sqrt{\frac{1 + (R_1 \omega C)^2}{\left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right)^2 + (R_2 \omega C)^2}} = u \sqrt{\frac{1 + (R_1 \omega C)^2}{(R_1 + R_2)^2 + (R_1 R_2 \omega C)^2}}$$

Задача 11.23. Участок цепи переменного тока (рис. 11.24) состоит из сопротивления R , соединенного последовательно с нагревательной спиралью, обладающей некоторой индуктивно-

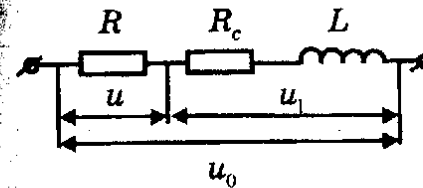


Рис. 11.24

стью и активным сопротивлением. Действующие значения напряжений на всем участке, сопротивлению и спирали равны соответственно u_0 , u и u_1 . За сколько времени с

помощью этой спирали температуру воды массой m можно повысить на ΔT , если удельная теплоемкость воды – c ? Потерями теплоты пренебречь.

Решение.

На представленном участке цепи R_c – сопротивление спирали, L – ее индуктивность, заданы действующие напряжения. Так как соединение последовательное, то во всех элементах этого участка в любой момент времени ток одинаков. Колебания тока опишем вектором \vec{I} , модуль которого – I . Направим этот вектор вдоль оси X (рис. 11.25).

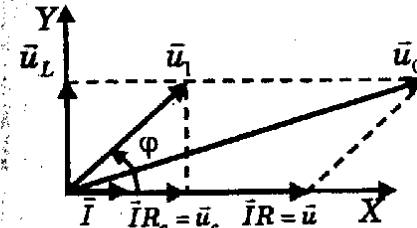


Рис. 11.25

по фазе совпадают с колебаниями тока, их амплитуды равны $u_c = IR_c$ и $u = IR$ и на векторной диаграмме также направлены вдоль оси X . Колебания напряжения \vec{u}_L на индуктивности опережают колебания тока на $\pi/2$, их амплитуда равна $IX_L = I\omega L = u_L$, и на векторной диаграмме вектор \vec{u}_L направлен вдоль оси Y . Напряжение на спирали $\vec{u}_1 = \vec{u}_L + \vec{u}_c$, напряжение во всей цепи $\vec{u}_0 = \vec{u}_1 + \vec{u}$ (соответствующие построения приведены на рис. 11.25).

По теореме косинусов

$u_0^2 = u_1^2 + u^2 - 2u_1 u \cos(\pi - \varphi) = u_1^2 + u^2 + 2u_1 u \cos \varphi$, где φ – сдвиг фаз между током и напряжением на участке, где включена спираль. Из последнего уравнения $\cos \varphi = \frac{u_0^2 - u_1^2 - u^2}{2u_1 u}$.

Действующее значение тока $I = \frac{u}{R}$. Мощность, выделяемая на

участке со спиралью: $\bar{P} = I u_1 \cos \varphi =$
 $= \left(\frac{u}{R}\right) u_1 \frac{u_0^2 - u_1^2 - u^2}{2u_1 u} = \frac{u_0^2 - u_1^2 - u^2}{2R}$

Для нагревания воды на ΔT ей понадобится сообщить количество теплоты $Q = cm\Delta T = \bar{P}\tau$, где τ – время работы спирали. После подстановки получаем

$$cm\Delta T = \frac{u_0^2 - u_1^2 - u^2}{2R} \tau \Rightarrow \tau = \frac{2cmR\Delta T}{u_0^2 - u_1^2 - u^2}$$

Задача 11.24. Первичная обмотка трансформатора имеет $N_1 = 2,4 \cdot 10^3$ витков. Сколько витков должна иметь вторичная обмотка, чтобы при напряжении на ее зажимах $u = 11$ В передавать во внешнюю цепь мощность $P = 22$ Вт? Сопротивление вторичной обмотки $R = 0,2$ Ом. Напряжение, подаваемое на первичную обмотку, $u_1 = 380$ В.

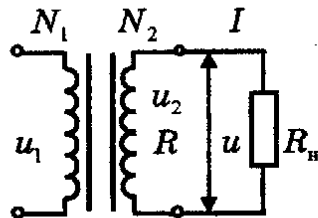


Рис. 11.26

Причем оно отлично от действующего напряжения u_2 , возникающего во вторичной обмотке,

Решение.

По условию задачи трансформатор замкнут на нагрузку R_n , по ней и по вторичной обмотке протекает ток I (рис. 11.26). Отметим, что напряжение u на зажимах вторичной обмотки – это напряжение на нагрузочном сопротивлении R_n . Причем оно отлично от дей-

на величину падения напряжения на этой обмотке, т.е. $u = u_2 - IR$. Передаваемая мощность – это мощность, выделяющаяся на нагрузочном сопротивлении, причем $P = Iu \Rightarrow I = \frac{P}{u}$. Из первого уравнения находим

$u_2 = u + IR = u + \frac{P}{u} R$. Пусть N_2 – количество витков во вторичной обмотке, тогда

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{N_1}{N_2} \Rightarrow N_2 = \frac{u_2}{u_1} N_1 \Rightarrow \frac{u^2 + PR}{uu_1} N_1 = 72$$

Задача 11.25. Имеются два одинаковых идеальных трансформатора с коэффициентом трансформации $k = 1/3$. Первичная обмотка одного из них последовательно соединена со вторичной

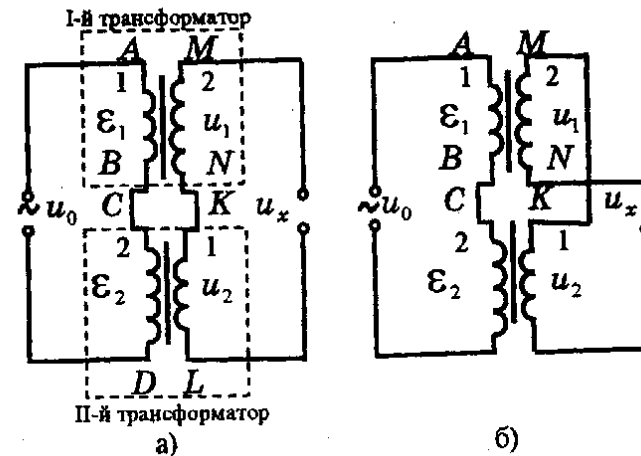


Рис. 11.27

обмоткой второго, а свободные концы этих обмоток включены в сеть переменного тока с амплитудой напряжения $u_0 = 100$ В. Вторичная обмотка первого трансформатора последовательно соединена с первичной обмоткой второго. Определить амплитуду переменного напряжения между свободными концами этих обмоток (рис. 11.27).

Решение.

Пусть в обмотке AB возникает ЭДС индукции $\mathcal{E}_1 = -L_1 i'(t)$, а в обмотке CD – ЭДС индукции $\mathcal{E}_2 = -L_2 i'(t)$. Так как обмотки AB и CD включены последовательно и токи в них одинаковы, то

$$\frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2} = \frac{L_1}{L_2} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 = k^2.$$

Здесь мы воспользовались тем, что индуктивность катушки пропорциональна квадрату числа витков в ней (см. главу 10).

Сумма $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = u_0$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2} = k^2, \\ \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = u_0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{E}_1 = k^2 \mathcal{E}_2, \\ \mathcal{E}_2(1+k^2) = u_0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{E}_2 = \frac{u_0}{1+k^2}, \\ \mathcal{E}_1 = \frac{u_0 k^2}{1+k^2}. \end{cases}$$

Пусть напряжение, получаемое в обмотке MN , $u_1 = \varphi_M - \varphi_N$. Из свойств трансформатора

$$\frac{\mathcal{E}_1}{u_1} = k \Rightarrow u_1 = \frac{\mathcal{E}_1}{k}.$$

Пусть напряжение, получаемое в обмотке KL , $u_2 = \varphi_K - \varphi_L$. Из определения коэффициента трансформации

$$\frac{u_2}{\mathcal{E}_2} = \frac{N_1}{N_2} = k \Rightarrow u_2 = k\mathcal{E}_2. \text{ Итак,}$$

$$\begin{cases} \varphi_M - \varphi_N = \frac{\mathcal{E}_1}{k}, \\ \varphi_K - \varphi_L = k\mathcal{E}_2, \end{cases} \Rightarrow (\varphi_M - \varphi_L) + (\varphi_K - \varphi_N) = \frac{\mathcal{E}_1}{k} + k\mathcal{E}_2.$$

Учитывая, что $\varphi_K = \varphi_N$, а $\varphi_M - \varphi_L = u_x$ – искомое напряжение, получаем для соединения обмоток (рис. 11.27а)

$$u_x = \frac{1}{k} \cdot \frac{u_0 k^2}{1+k^2} + k \frac{u_0}{1+k^2} = \frac{u_0 k}{1+k^2} + \frac{u_0 k}{1+k^2} = \frac{2k}{1+k^2} u_0 = 60 \text{ В.}$$

Для случая, изображенного на рис. 11.27б, после вычитания уравнений системы найдем

$$(\varphi_K - \varphi_M) + (\varphi_N - \varphi_L) = k\mathcal{E}_2 - \frac{\mathcal{E}_1}{k}. \text{ Так как}$$

ак $\varphi_K = \varphi_M$, а $\varphi_N - \varphi_L = u_x$, то

$$u_x = k \frac{u_0}{1+k^2} - \frac{1}{k} \frac{u_0 k^2}{1+k^2} = 0.$$

Задача 11.26. Трансформатор, имеющий число витков в первичной обмотке N_1 , а во вторичной – N_2 , подключен к источнику переменного тока с ЭДС \mathcal{E} и внутренним сопротивлением r . Нагрузка с сопротивлением R подключена так, как показано на рис. 11.28. Определить напряжение на нагрузке.

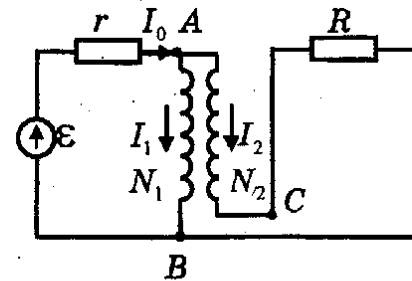


Рис. 11.28

Решение. Пусть u_1, u_2, I_1, I_2 – действующие значения напряжений и токов соответственно в первичной и вторичной обмотках. I_0 – действующее значение тока в источнике. Предположим, что токи в некоторый момент времени направлены так, как показано на рис. 11.28. Из свойств трансформатора следует, что $\frac{u_1}{u_2} = \frac{N_1}{N_2}$ (1). Ток $I_0 = I_1 + I_2$ (2). Так как трансформатор идеальный, то $u_1 I_1 = u_2 I_2$ (3). Напряжение на первичной обмотке $u_1 = \mathcal{E} - I_0 r$ (4). Разность потенциалов между точками A и B $\varphi_A - \varphi_B = u_1$, разность потенциалов между точками A и C $\varphi_A - \varphi_C = u_2$. Вычитая последнее уравнение из предыдущего, получаем $\varphi_C - \varphi_B = u_1 - u_2$. Но $(\varphi_C - \varphi_B)$ – напряжение на нагрузочном сопротивлении, равно $I_2 R$, поэтому $I_2 R = u_1 - u_2$ (5).

Решение.

Уравнения (1)–(5) образуют систему

Глава 12. Геометрическая оптика

12.1. Световой луч

В оптике изучается распространение и взаимодействие с веществом электромагнитных волн, длина которых лежит в диапазоне от 10^{-7} до 10^{-5} м. Внутри этого диапазона находится участок длин волн от $4 \cdot 10^{-7}$ м до $7,6 \cdot 10^{-7}$ м, соответствующий видимому свету. В оптический диапазон, кроме видимого света, включаются инфракрасное излучение ($\lambda > 7,6 \cdot 10^{-7}$ м) и ультрафиолетовое излучение ($\lambda < 4 \cdot 10^{-7}$ м).

Направление распространения любых волн, в том числе и световых, определяется с помощью лучей – линий, перпендикулярных волновым поверхностям и указывающих направление распространения энергии волны. Таким образом, световой луч указывает направление распространения световой энергии.

Геометрической оптикой называется раздел оптики, в котором изучаются законы распространения световой энергии в прозрачных средах на основе представлений о световом луче. Законы геометрической оптики применяются в случаях, когда длина световой волны значительно меньше размеров препятствий, встречающихся на пути ее распространения.

12.2. Законы геометрической оптики

1. **Закон прямолинейного распространения света:** в однородной среде луч света распространяется прямолинейно.
2. **Закон независимого распространения света:** отдельные световые лучи не влияют друг на друга и распространяются независимо от других лучей.
3. **Закон отражения света:** падающий луч, отраженный луч и перпендикуляр к границе раздела двух сред, восстановленный в точке падения луча, лежат в одной плоскости, причем угол падения равен углу отражения.

$$\begin{cases} u_1 = \frac{N_1}{N_2}, \\ u_2 = \frac{N_2}{N_1}, \\ I_0 = I_1 + I_2, \\ u_1 I_1 = u_2 I_2, \\ u_1 = \mathcal{E} - I_0 r, \\ I_2 R = u_1 - u_2. \end{cases}$$

Пусть $\frac{N_1}{N_2} = k$. Из уравнения (1) $u_1 = k u_2$. Подставляем в

(3), получаем $k I_1 = I_2 \Rightarrow I_1 = \frac{I_2}{k}$; подставляем в (2), получаем

$I_0 = I_2 \left(\frac{1}{k} + 1 \right) \Rightarrow I_0 = I_2 \frac{1+k}{k}$; подставляем в (4), получаем

$u_1 = \mathcal{E} - I_2 r \frac{1+k}{k}$. Из (1) $u_2 = \frac{u_1}{k}$. Подставляем в (5):

$$\begin{aligned} I_2 R = u_1 - \frac{u_1}{k} &= u_1 \left(1 - \frac{1}{k} \right) = u_1 \frac{k-1}{k} = \left(\mathcal{E} - I_2 r \frac{1+k}{k} \right) \left(\frac{k-1}{k} \right) = \\ &= \mathcal{E} \frac{k-1}{k} + I_2 r \frac{1-k^2}{k^2} \Rightarrow I_2 \left(R - r \frac{1-k^2}{k^2} \right) = \mathcal{E} \frac{k-1}{k} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{\mathcal{E}(k-1)}{k \left(R - r \frac{1-k^2}{k^2} \right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_n = I_2 R = \frac{\mathcal{E} R (k-1)}{k R - r \frac{1-k^2}{k^2}} = \frac{\mathcal{E} R k (k-1)}{k^2 R + r (k^2 - 1)}, \text{ где } k = \frac{N_1}{N_2}.$$

На рис. 12.1: MN – граница раздела двух сред; AB – падающий луч; BD – отраженный луч; CB – перпендикуляр к границе двух сред; по определению $\angle ABC = \alpha$ – угол падения, а $\angle CBD = \gamma$ – угол отражения, причем $\alpha = \gamma$.

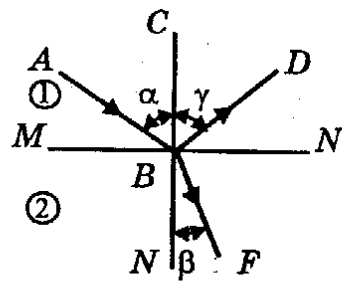


Рис. 12.1

Абсолютным показателем преломления n некоторой среды называют отношение скорости света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с к скорости света v в этой среде

$$n = \frac{c}{v} \quad (12.1)$$

Если рассматриваются две среды с различными абсолютными показателями преломления, то среду с меньшим показателем преломления называют оптически менее плотной, а среду с большим показателем – оптически более плотной.

4. Закон преломления света:

падающий луч, преломленный луч и перпендикуляр к границе раздела двух сред, восстановленный в точке падения луча, лежат в одной плоскости; отношение синуса угла падения к синусу угла преломления равно отношению показателя преломления второй среды к показателю преломления первой среды

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1} = n \quad (12.2)$$

Отношение $\frac{n_2}{n_1} = n$ называют относительным показате-

лем преломления второй среды по отношению к первой. На рис. 12.1: BF – преломленный луч; $\angle NBF = \beta$ – угол преломления.

Преобразовав формулу (12.2) к виду $\sin \alpha = n \sin \beta$, можно сделать следующие выводы:

если луч падает перпендикулярно границе раздела двух сред ($\alpha = 0$), то он не преломляется ($\beta = 0$);

если луч переходит из среды оптически менее плотной в среду оптически более плотную ($n_2 > n_1 \Rightarrow n > 1$), то угол преломления меньше (или равен при $\alpha = 0$) угла падения, т.е. $\beta \leq \alpha$ (рис.12.1).

5. Принцип обратимости хода световых лучей:

если при выходе светового луча из любой системы преломляющих и отражающих сред заставить световой луч отразиться точно назад, то он пройдет всю систему в обратном направлении тем же путем и вернется к своему источнику.

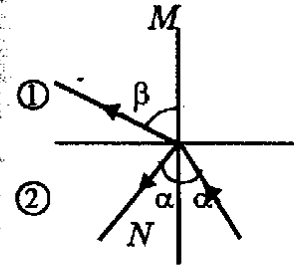


Рис. 12.2

Например, на рис. 12.2 преломленный луч образует в среде 1 угол β с нормалью MN . Если из среды 1 пустить луч в обратном направлении, то он, оказавшись в среде 2, образует с нормалью MN угол α .

12.3. Полное (внутреннее) отражение света

Пусть свет распространяется из оптически более плотной среды 2 в оптически менее плотную среду 1. Угол падения равен α , а угол преломления равен β (рис. 12.2). Закон преломления

запишется в виде: $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{(n_2/n_1)} = \frac{1}{n}$, где $n = \frac{n_2}{n_1} > 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin \beta = n \sin \alpha$. Так как $n > 1$, то $\beta > \alpha$ и при некотором угле

падения $\alpha_0 < 90^\circ$ угол преломления β станет равным 90° . В этом случае преломленный луч скользит по поверхности раздела двух сред, не проникая в среду 1. При $\alpha > \alpha_0$ существуют только падающий и отраженный лучи, преломленного луча нет.

Это явление, в котором луч из оптически более плотной среды не проникает в оптически менее плотную среду, называется полным отражением. Угол падения α_0 , при котором наступает полное отражение, называется предельным углом полного отражения. Его находят из условия, что угол преломления $\beta = 90^\circ$, поэтому

$$\sin \alpha_0 = \frac{1}{n}$$

(12.3)

12.4. Изображение в плоском зеркале

Сформулируем общее правило построения изображения в плоском зеркале (рис. 12.3). Пусть S – точечный источник света, MN – плоское зеркало. Выберем два луча SA и SB , падающих на зеркало MN . После отражения от зеркала лучи идут расходящимся пучком.

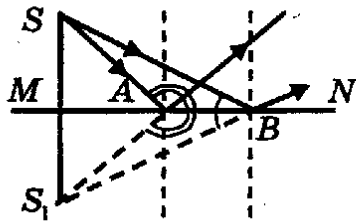


Рис. 12.3

В точке S_1 за зеркалом пересекаются их продолжения. Это и есть мнимое изображение точки S . Из законов отражения следует, что $\angle SBA = \angle S_1BA$ и $\angle SAB = \angle S_1AB$, причем AB – общая сторона у $\triangle SAB$ и $\triangle S_1AB$, поэтому

$\triangle SAB = \triangle S_1AB \Rightarrow SB = S_1B$, следовательно, MB – биссектриса угла при вершине равнобедренного $\triangle SS_1B$, поэтому MB – ось симметрии. Общий вывод таков: изображение предмета в плоском зеркале – мнимое и получается симметричным отражением предмета относительно плоскости зеркала.

12.5. Тонкие линзы

Свет может испытывать преломление не только на плоской границе двух сред, но и на сферических поверхностях. Важным случаем такого преломления является преломление в линзе.

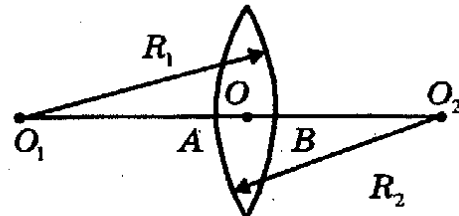


Рис. 12.4

Линза представляет собой прозрачное тело, ограниченное сферическими поверхностями. Линзы, которые посередине толще, чем у краев,

называются выпуклыми, в противном случае линзы являются вогнутыми.

На рис. 12.4 представлена выпуклая линза.

Когда наибольшая толщина линзы $AB \ll R_1$ и $AB \ll R_2$, линзу называют тонкой. В этом случае точки A и B – вершины сферических сегментов – можно считать совпадающими в точке O . Ее называют оптическим центром линзы. Любая прямая, проходящая через оптический центр линзы, называется оптической осью. Оптическая ось O_1O_2 называется главной оптической осью.

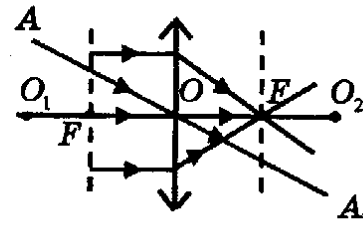


Рис. 12.5

Установлено, что после прохождения через выпуклую линзу световые лучи отклоняются к ее главной оптической оси, поэтому выпуклые линзы называют собирающими. На рисунках и чертежах собирающие линзы изображаются, как показано на рис. 12.5.

После прохождения вогнутой линзы световые лучи удаляются от ее главной оптической оси, поэтому вогнутые линзы называют рассеивающими. На рисунках их изображают, как показано на рис. 12.6

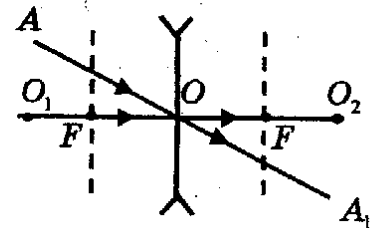


Рис. 12.6

Симметрично относительно плоскости линзы, на ее главной оптической оси, расположены особые точки линзы, которые называются ее фокусами. Расстояние от этих точек до плоскости линзы называется фокусным

расстоянием F . Фокусное расстояние линзы зависит от радиусов кривизны R_1 и R_2 сферических поверхностей, образующих линзу, и показателя преломления n вещества, из которого изготовлена линза. Фокусное расстояние линзы вычисляют по формуле

$$\frac{1}{F} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (12.4)$$

У собирающих линз $F > 0$, у рассеивающих — $F < 0$.

Величину $D = \frac{1}{F}$ называют оптической силой линзы.

Плоскость, проходящая через фокус линзы перпендикулярно ее главной оптической оси, называется **фокальной плоскостью линзы**.

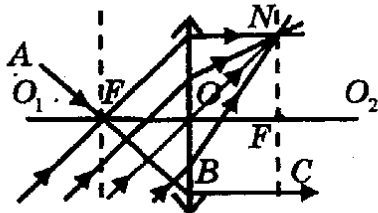


Рис. 12.7

Лучи света, распространяющиеся близко к главной оптической оси линзы (их называют **параксиальными**), обладают рядом важных свойств. Перечислим эти свойства для **собирающих линз**.

1. Луч, распространяющийся вдоль любой оптической оси линзы, преломлений не испытывает (лучи AA_1 и O_1O_2 на рис. 12.5).

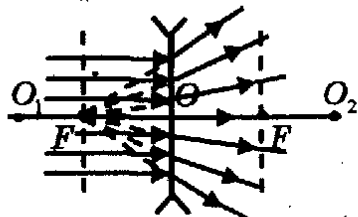


Рис. 12.8

2. Световые лучи, параллельные главной оптической оси, после преломления в собирающей линзе пересекаются в одной точке — фокусе линзы (рис. 12.5).

3. Лучи, падающие на линзу параллельным пучком, после преломления в линзе пересекаются в точке N , принадлежащей фокальной плоскости (рис. 12.7).

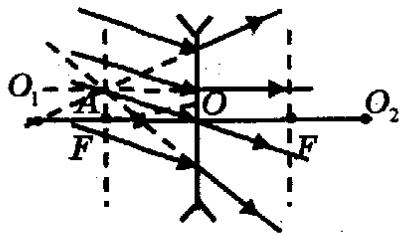


Рис. 12.9

4. Луч, проходящий через фокус линзы, после преломления в ней распространяется параллельно главной оптической оси (луч AB на рис. 12.7).

Перечислим наиболее важные свойства параксиальных лучей для **рассеивающих линз**.

1. Луч, распространяющийся вдоль любой оптической оси, преломлений не испытывает (лучи AA_1 и OO_1 на рис. 12.6).

2. Световые лучи, параллельные главной оптической оси, после преломления в линзе идут расходящимся пучком, причем их продолжения пересекаются в фокусе линзы (рис. 12.8).

3. Лучи, падающие на рассеивающую линзу параллельным пучком, после преломления в линзе образуют расходящийся пучок, причем продолжения преломленных лучей пересекаются в точке A фокальной плоскости линзы (рис. 12.9).

12.6. Изображение в тонкой линзе. Формула тонкой линзы

Построим изображение предмета AB в тонкой собирающей линзе. Для определенности будем считать, что предмет AB находится на расстоянии $d > F$ от линзы (рис. 12.10). Проведем через точку A луч AD , параллельный главной оптической оси линзы. После преломления в линзе он проходит через фокус линзы F . Вторым луч AO возьмем проходящим через оптический центр O . Такой луч преломления в линзе не испытывает. Пересечение лучей DF и AO дает точку A_1 ; A_1B_1 — действительное обратное изображение предмета AB в линзе.

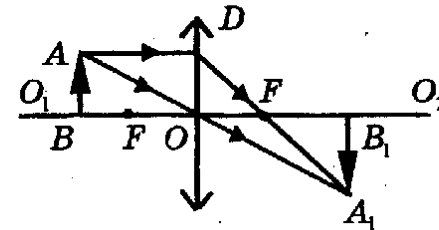


Рис. 12.10

Выведем формулу, связывающую три величины: расстояние d от предмета до линзы, расстояние f от изображения до линзы и фокусное расстояние F . Из подобия треугольников AOB и $A_1OB_1 \Rightarrow \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BO}{B_1O}$. Из подобия треугольников ODF и $A_1FB_1 \Rightarrow \frac{OD}{A_1B_1} = \frac{OF}{FB_1}$. Так как

Из подобия треугольников AOB и $A_1OB_1 \Rightarrow \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BO}{B_1O}$. Из подобия треугольников ODF и $A_1FB_1 \Rightarrow \frac{OD}{A_1B_1} = \frac{OF}{FB_1}$. Так как

$$OD = AB \Rightarrow \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{OF}{FB_1}. \text{ Приравнивая правые части про-}$$

$$\text{порций, находим, что } \frac{BO}{B_1O} = \frac{OF}{FB_1}.$$

$$\text{Но } BO = d, \quad B_1O = f, \quad OF = F, \\ FB_1 = B_1O - OF = f - F, \text{ поэтому}$$

$$\frac{d}{f} = \frac{F}{f - F} \Rightarrow d(f - F) = fF \Rightarrow df = dF + fF.$$

Разделив последнее равенство на произведение dfF , получаем формулу тонкой линзы

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f} \quad (12.5)$$

Эта формула справедлива для всех тонких линз, как собирающих, так и рассеивающих, при любых взаимных расположениях предмета и линзы. В формуле (12.5) $F > 0$ у собирающей линзы и $F < 0$ у рассеивающей линзы; $f > 0$, если изображение действительное, и $f < 0$, если мнимое; $d > 0$ в случае действительной светящейся точки, и $d < 0$, если источник мнимый (например, на линзу падает сходящийся пучок лучей, продолжения которых пересекаются в одной точке).

$$\text{Из рис. 12.10 следует, что увеличение линзы } \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{f}{d}.$$

В общем случае увеличение линзы находят по формуле

$$\Gamma = \left| \frac{A_1B_1}{AB} \right| = \left| \frac{f}{d} \right| \quad (12.6)$$

12.7. Фотоаппарат

На законах геометрической оптики основано действие многих оптических приборов, в том числе и фотоаппарата. Фотоаппарат состоит из светонепроницаемой камеры, в передней части которой находится система линз, называемая объективом (рис. 12.11)

Во многих случаях объектив можно считать тонкой собирающей линзой. Открывает и закрывает объектив специальный затвор. Время, в течение которого объектив остается открытым, называется временем экспозиции.

В задней части камеры расположена фотопленка, на которой при помощи объектива создается действительное изображение фотографируемого предмета. Фотографируемый объект может находиться на разных расстояниях от объектива. Для того, чтобы изображе-

ние оказалось точно в плоскости фотопленки, объектив может перемещаться вдоль оптической оси. Этим осуществляется наводка на резкость.

Светочувствительная эмульсия фотопленки представляет собой кристаллы бромистого серебра. Кристаллы имеют конечные размеры, поэтому если изображения двух различных точек попадут на один и тот же кристалл, на фотопленке получится одна точка. Отсюда следует, что любая пленка имеет определенную разрешающую способность.

Поток световой энергии, проходящий через объектив, регулируется диафрагмой Д. Диафрагма позволяет также увеличить четкость изображения или глубину резкости.

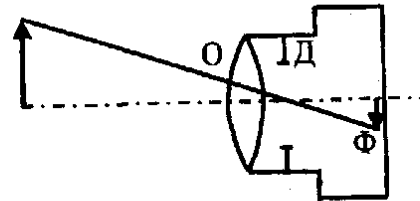


Рис. 12.11

12.8. Зрение. Очки

Глаз человека имеет очень сложное строение. В целом глаз можно рассматривать как собирающую линзу с переменным фокусным расстоянием, с помощью которой получают действительные обратные изображения предметов на сетчатке глаза. При этом расстояние от сетчатки до линзы (глаза) остается фиксированным.

Если предмет расположен далеко от глаза, то изображение на сетчатке нормального глаза получается без напряжения мышц глаза. При приближении предмета мышцы глаза рефлекторно изменяют его фокусное расстояние, в результате чего изображение предмета снова получается на сетчатке. Этот процесс называется аккомодацией глаза.

Минимальное расстояние от предмета до глаза, при котором можно рассматривать детали предмета без большого напряжения, называется расстоянием наилучшего зрения. Для нормального глаза оно равно 25 см.

В некоторых случаях глаз в ненапряженном состоянии создает изображение удаленного объекта не на сетчатке, а перед ней. В этом случае человек может резко видеть предметы, расположенные не дальше некоторого расстояния. Такой дефект зрения называют близорукостью.

В других случаях изображения удаленных предметов получаются за сетчаткой, и человек может резко видеть предметы, расположенные не ближе некоторого расстояния. Такой дефект называется дальзорукостью.

Эти недостатки зрения можно компенсировать с помощью очков. При этом линзы очков должны создавать изображение предмета на таком расстоянии, с которого глаз может это изображение видеть резко. Кроме того, полученные с помощью линз изображения должны быть прямыми. Легко убедиться в том, что прямые изображения, создаваемые тонкими линзами, всегда мнимые. Таким образом, линзы очков должны создавать прямые мнимые изображения на расстояниях, находящихся в пределах аккомодации глаза.

12.9. Примеры решения задач

Задача 12.1. Два плоских зеркала образуют двугранный угол $\alpha = 60^\circ$. На одно из зеркал падает луч, расположенный в плоскости, перпендикулярной линии пересечения зеркал. Найти угол отклонения этого луча от первоначального направления после отражения от обоих зеркал (рис. 12.12).

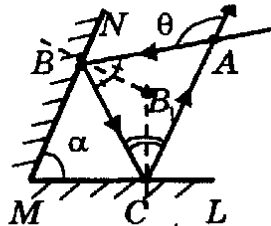


Рис. 12.12

искомый угол отклонения луча после двух отражений от зеркал.

Решение.
 MN и ML – плоские зеркала;
 AB – падающий на зеркало MN луч;
 $BB_1 \perp MN$; BC – падающий на зеркало ML луч;
 $CB_1 \perp ML$; AC – отраженный от двух зеркал луч;
 θ –

В четырехугольнике $BMCB_1$ $\angle MBB_1 = \angle MCB_1 = 90^\circ$, поэтому $\angle BMC + \angle BB_1C = 180^\circ \Rightarrow \angle BB_1C = 180^\circ - \angle BMC = 180^\circ - \alpha$.

В треугольнике BCB_1 $\angle B_1BC + \angle B_1CB = 180^\circ - \angle BB_1C = 180^\circ - (180^\circ - \alpha) = \alpha$. Из закона отражения следует, что $\angle ABC = 2\angle B_1BC$ и $\angle ACB = 2\angle B_1CB$. Поэтому $\angle ABC + \angle ACB = 2(\angle B_1BC + \angle B_1CB) = 2\alpha$. Искомый угол отклонения θ является внешним по отношению к $\triangle BAC$, поэтому $\theta = \angle ABC + \angle ACB = 2\alpha = 120^\circ$.

Задача 12.2. На стене, плоскость которой отклонена от вертикали на $4,87^\circ$, укреплено плоское зеркало (рис. 12.13). С какого максимального расстояния человек, рост которого $h = 170$ см, сможет увидеть в зеркале хотя бы часть своего изображения?

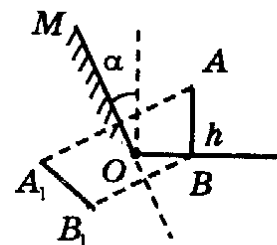


Рис. 12.13

Решение.
 Пусть AB – человек, стоящий у зеркала, тогда A_1B_1 – его изображение в зеркале MO (рис. 12.13). A_1B_1

и AB симметричны относительно зеркала MO . Ясно, что в этом случае человек видит свое изображение. Предельный случай получается, когда прямая AA_1 проходит через точку O (рис. 12.14). В $\triangle AOB$ $\angle AOB = \alpha$, поэтому искомое расстояние

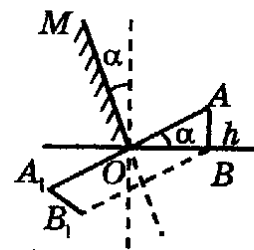


Рис. 12.14

$$OB = \frac{AB}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{h}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Отметим, что угол α мал, поэтому $\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$ при условии, что α выражен в радианах.

$$\alpha = 4,87^\circ = \frac{4,87}{180} \cdot 3,14 \text{ рад} = 0,085 \text{ рад.} \quad \text{Следовательно,}$$

$$OB = \frac{h}{\alpha} = 20 \text{ м.}$$

Задача 12.3. Два плоских зеркала MN и ML образуют двугранный угол $\alpha = 60^\circ$. Точечный источник света S находится между зеркалами на равном расстоянии от каждого из них. Найти число изображений источника в зеркалах (рис. 12.14).

Решение.

Строим изображение точки S в зеркале MN , отображая эту точку симметрично относительно плоскости MN . Получаем первое изображение S_1 . Аналогично строим изображение точки S в зеркале ML , получаем второе изображение S_2 . Так как $\Delta S_1MC = \Delta SMC = \Delta SMK = \Delta S_2MK$ (по двум кате-

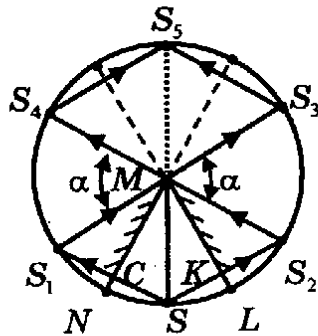


Рис. 12.14

там), то $S_1M = SM = S_2M$. Следовательно, точки S_1, S, S_2 расположены на одной окружности с центром в точке M и радиусом SM .

Далее строим изображение точки S_1 в зеркале ML и изображение точки S_2 в зеркале MN . Получаем соответственно точки S_3 и S_4 . При этом вероят-

на ситуация, когда не хватает плоскости зеркал. В этом случае плоскости зеркал надо продолжить. Поскольку S_1 и S_3 симметричны относительно плоскости ML , а S_2 и S_4 симметричны относительно плоскости MN , то S_3 и S_4 находятся на построенной окружности.

Далее строим изображение точки S_3 в зеркале MN и точки S_4 - в зеркале ML . Так как $\angle NML = \alpha = 60^\circ$, то

изображением точек S_3 и S_4 является точка S_5 . Итак, получается пять изображений.

Задача 12.4. Луч, падающий на плоскую границу двух сред, относительный показатель преломления которых n , частично отражается, частично преломляется. При каком угле падения отраженный луч перпендикулярен к преломленному лучу?

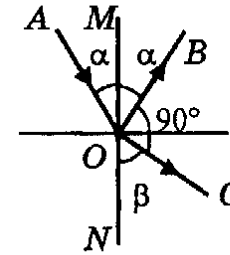


Рис. 12.15

раженный луч перпендикулярен к преломленному лучу?

Решение.

AO - падающий луч (рис. 12.15), BO - отраженный и CO - преломленный лучи. Запишем закон преломле-

ния: $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$. По условию задачи

$$\alpha + \beta = 90^\circ.$$

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n, \\ \alpha + \beta = 90^\circ, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 90^\circ - \alpha, \\ \frac{\sin \alpha}{\sin(90^\circ - \alpha)} = n, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 90^\circ - \alpha, \\ \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = n, \end{cases} \Rightarrow \Rightarrow \text{tg} \alpha = n \Rightarrow \alpha = \text{arctg} n.$$

Задача 12.5. Определить смещение луча после прохождения через плоскопараллельную стеклянную пластинку толщиной $d = 6$ см, имеющую показатель преломления $n = 1,6$. Угол падения луча на пластинку $\alpha = 60^\circ$ (рис. 12.16).

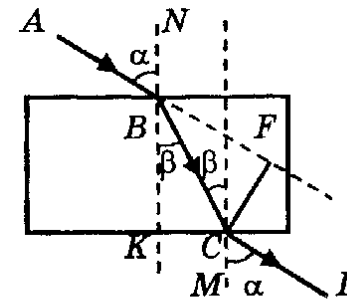


Рис. 12.16

Решение.

AB - падающий на пластинку луч, BN - перпендикуляр в точке падения, α - угол падения. BC - прелом-

ленный луч, β - угол преломления. CM - перпендикуляр в точке падения луча на нижнюю грань пластинки. Так как

$CM \parallel BN$, то луч падает на нижнюю грань пластинки под углом β . На основании обратимости хода световых лучей можно утверждать, что он выходит из пластинки под углом α . Итак, $AB \parallel CD$, однако происходит смещение луча на расстояние CF ($CF \perp AB$). Запишем закон преломления в точке B :

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n \Rightarrow \sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n} \Rightarrow \sin \beta = 0,54 \Rightarrow \beta = 32,8^\circ.$$

$\angle KBF = \angle ABN = \alpha$ (вертикальные углы), поэтому

$$\angle CBF = \alpha - \beta. \text{ Из } \triangle CBK: BC = \frac{BK}{\cos \beta} = \frac{d}{\cos \beta}. \text{ Из } \triangle CBF$$

$$\text{смещение луча } CF = BC \sin \angle CBF = \frac{d \sin(\alpha - \beta)}{\cos \beta} = 3,3 \text{ см.}$$

Задача 12.6. Предмет находится на расстоянии $l = 15$ см от плоскопараллельной стеклянной пластинки. Наблюдатель рассматривает предмет через пластинку, причем луч зрения нормален к ней. Определить расстояние x от изображения предмета до ближайшей к наблюдателю грани, если толщина пластинки $d = 4,5$ см, показатель преломления стекла $n = 1,5$.

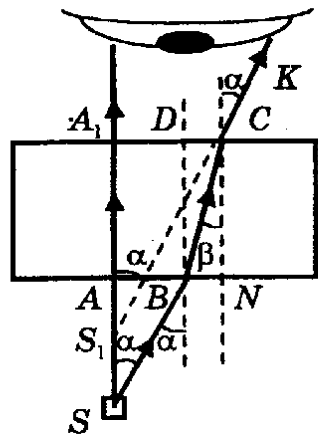


Рис. 12.17

SA и SB должны попасть в глаз, поэтому угол α мал. BD — нормаль к пластине. $\angle DBC = \beta = \angle BCN$.

Решение. Построим изображение предмета (рис. 12.17). S — предмет, SA — луч, падающий перпендикулярно пластине, SB — луч, падающий под углом α к пластине. Отметим, что лучи

После прохождения пластины лучи SA и CK расходятся. Их продолжения пересекаются в точке S_1 , которая является мнимым изображением точки S . Искомое расстояние $A_1S_1 = x$.

$$\text{Из } \triangle SAB: AB = SA \cdot \operatorname{tg} \alpha = l \operatorname{tg} \alpha.$$

$$\text{Из } \triangle CBD: CD = BD \cdot \operatorname{tg} \angle DBC = d \operatorname{tg} \beta.$$

$$A_1C = A_1D + CD = AB + CD = l \operatorname{tg} \alpha + d \operatorname{tg} \beta.$$

В $\triangle A_1S_1C$: $\angle A_1S_1C = \alpha$ (т.к. $S_1K \parallel SB$), поэтому

$$A_1S_1 = x = A_1C \operatorname{ctg} \alpha = \frac{A_1C}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{l \operatorname{tg} \alpha + d \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} = l + d \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Изображение получается при допущении, что угол α мал, значит, мал и угол преломления β . Следовательно,

$$\frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{1}{n}. \text{ Итак, } x = l + \frac{d}{n} = 18 \text{ см.}$$

Задача 12.7. На дне сосуда, наполненного водой до высоты h , находится точечный источник света. На поверхности воды плавает круглый диск так, что центр диска находится над источником света. При каком минимальном радиусе диска ни один луч не выйдет через поверхность воды? Показатель преломления воды равен n .

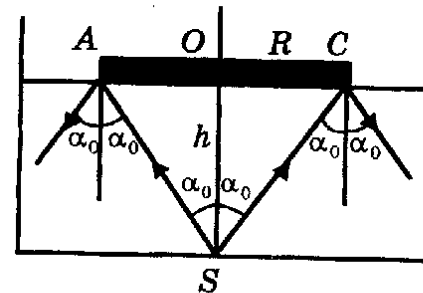


Рис. 12.18

Решение. Лучи, исходящие от источника S и попадающие на диск, отражаются от него и через поверхность воды не выходят (рис. 12.18). Если угол падения луча SA равен предельному углу полного отражения, то этот луч также не выходит через поверхность воды. Лучи, падающие на поверхность воды левее точки A , имеют угол падения больше α_0 и также не выходят через поверхность воды. Та-

ким образом, для луча SA должно выполняться условие:

$$\sin \alpha_0 = \frac{1}{n}$$

Из $\triangle AOS$: $\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{AO}{SO} = \frac{R}{h}$. С другой стороны,

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{\sin \alpha_0}{\cos \alpha_0} = \frac{\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha_0}} = \frac{\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{n}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}}$$

Приравнявая выражения для тангенсов, получаем

$$\frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} = \frac{R}{h} \Rightarrow R = \frac{h}{\sqrt{n^2 - 1}}$$

Задача 12.8. На половину шара радиусом $r = 2$ см, изготовленного из стекла с показателем преломления $n = \sqrt{2}$, падает параллельный пучок лучей. Определить радиус светлого пятна на экране, расположенном на расстоянии $L = 4,82$ см от центра шара.

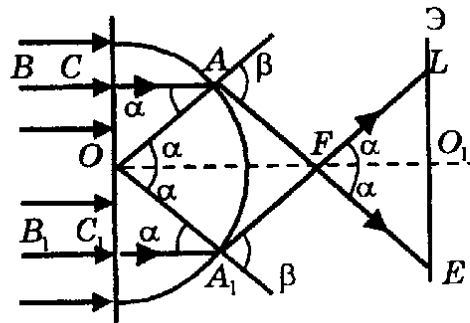


Рис. 12.19

OA — радиус шара, $\angle OAC$ — угол падения луча на сферическую поверхность, причем $\sin \alpha = \frac{OC}{OA} = \frac{OC}{r}$. Следовательно, по мере

удаления падающего луча от оси симметрии OO_1 увеличивается угол падения α . В некоторой точке он становится равным предельному углу полного отражения:

на экране, расположенном на расстоянии $L = 4,82$ см от центра шара.

Решение.

Рассмотрим луч BC , падающий на плоскую поверхность (рис. 12.19). Он проникает в шар и, не отклоняясь, попадает на сферическую поверхность в точке A . OA

$\sin \alpha_0 = \frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha_0 = 45^\circ$. При этом угол преломления β равен 90° .

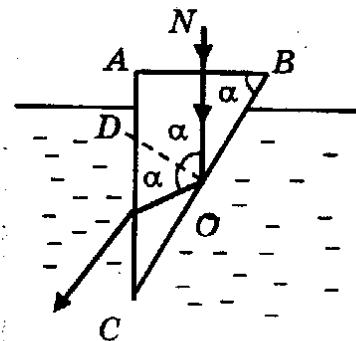
Из шара выйдут лишь те лучи пучка, которые падают на плоскую поверхность между точками C и C_1 . Они-то и образуют после преломления на сферической поверхности светлое пятно на экране, радиус которого равен $O_1E = O_1L$. При

$\alpha = 45^\circ$ AOA_1F — квадрат и $OF = OA\sqrt{2} = r\sqrt{2} \Rightarrow O_1F = OO_1 - OF = L - r\sqrt{2}$.

В $\triangle O_1FE$: $\angle O_1FE = \alpha = 45^\circ$, поэтому

$O_1E = O_1F = L - r\sqrt{2} = 2$ см.

Задача 12.9. В воду опущен прямоугольный стеклянный клин. Показатель преломления стекла $n = 1,5$. При каких значениях угла α луч света, падающий нормально на грань AB , целиком достигнет грани AC ? Показатель преломления воды $n_v = 1,33$ (рис. 12.20).



Решение.

Луч, падающий перпендикулярно грани AB , не преломляется. Пусть O — точка падения его на грань BC . DO — перпендикуляр, восстановленный в точке падения, тогда $\angle DON$ — угол

падения, причем $\angle DON = \angle CBA = \alpha$. Луч целиком достигнет грани AC , если от грани BC он будет полностью отражаться. Для этого необходимо, чтобы $\alpha \geq \alpha_0$, где α_0 — угол полного отражения на границе стекло-вода.

$\sin \alpha_0 = \frac{n_v}{n} = 0,89 \Rightarrow \alpha_0 = 62,5^\circ$. При $\alpha \geq 62,5^\circ$ луч света целиком достигнет грани AC .

Задача 12.10. Луч света падает на трехгранную стеклянную призму под углом α . Показатель преломления стекла — n . Преломляющий угол призмы — φ . Под каким углом луч выйдет из призмы и каков угол его отклонения от первоначального направления?

Решение.

NA — падающий луч (рис. 12.21); $AB \perp PQ$; AC — преломленный в призме луч; $\angle BAC = \beta$ — угол преломления; $BC \perp QR$; $\angle ACB = \gamma$; ψ — искомый угол выхода луча из призмы, $\angle CDM = \theta$ — угол отклонения луча. Проведенное построение показывает, что призма отклоняет падающий на нее луч к основанию. Запишем закон преломления в точках A и C .

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n \quad (1), \quad \frac{\sin \gamma}{\sin \psi} = \frac{1}{n} \quad (2).$$

Так как $AB \perp PQ$ и $BC \perp QR$, то $\angle CBL = \angle PQR = \varphi$. $\angle CBL$ — внешний угол $\triangle ABC$, поэтому он равен сумме двух внутренних углов, с ним не смежных.
 $\angle CBL = \angle BAC + \angle ACB$ или $\varphi = \beta + \gamma$ (3).

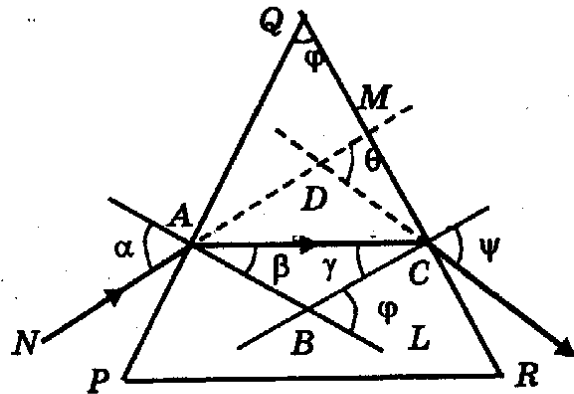


Рис. 12.21

$$\text{Из (1): } \sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n} \Rightarrow \beta = \arcsin \left(\frac{\sin \alpha}{n} \right).$$

$$\text{Из (3): } \gamma = \varphi - \beta = \varphi - \arcsin \left(\frac{\sin \alpha}{n} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{Из (2): } \sin \psi &= n \sin \gamma = n \sin \left(\varphi - \arcsin \left(\frac{\sin \alpha}{n} \right) \right) = \\ &= n \left(\sin \varphi \cos \arcsin \left(\frac{\sin \alpha}{n} \right) - \cos \varphi \frac{\sin \alpha}{n} \right); \end{aligned}$$

Из тригонометрии известно, что $\cos \arcsin x = \sqrt{1 - x^2}$, поэтому

$$\begin{aligned} \text{мы } \sin \psi &= n \left(\sin \varphi \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}} - \cos \varphi \frac{\sin \alpha}{n} \right) = \\ &= \sin \varphi \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \cos \varphi \sin \alpha. \text{ Следовательно,} \\ \psi &= \arcsin \left(\sin \varphi \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \cos \varphi \sin \alpha \right) \quad (4). \end{aligned}$$

Отметим, что $\angle DAB = \alpha$ (вертикальные углы) и $\angle DCB = \psi$. Поэтому $\angle DAC = \angle DAB - \beta = \alpha - \beta$, а $\angle ACD = \angle DCB - \gamma = \psi - \gamma$.

θ — внешний угол $\triangle ADC$, поэтому
 $\theta = \angle DAC + \angle ACD = (\alpha - \beta) + (\psi - \gamma) = (\alpha + \psi) - (\beta + \gamma)$.
 Но, как уже доказывалось, $\beta + \gamma = \varphi$, следовательно
 $\theta = (\alpha + \psi) - \varphi$ (5). Отметим, что угол ψ вычисляется по формуле (4).

При малых преломляющих углах φ и малых углах падения α формулу (5) можно существенно упростить. Из (1): $\sin \alpha = n \sin \beta$. Так как α и β — малы, то $\alpha = n\beta$. Из (2): $\sin \psi = n \sin \gamma$. При малых α и φ углы ψ и γ также малы, поэтому $\psi = n\gamma$. Формула принимает вид:

$$\theta = (n\beta + n\gamma) - \varphi = n(\beta + \gamma) - \varphi = n\varphi - \varphi = (n - 1)\varphi.$$

Задача 12.11. Равнобедренная стеклянная призма с малыми углами преломления φ (бипризма) помещена в параллельный пучок лучей, падающих нормально к ее основанию. Показатель преломления стекла $n = 1,57$, основание призмы $a = 5$ см. Найти угол φ , если в середине экрана, расположенного на рас-

стоянии $L = 100$ см от призмы, образуется темная полоса шириной $d = 1$ см.

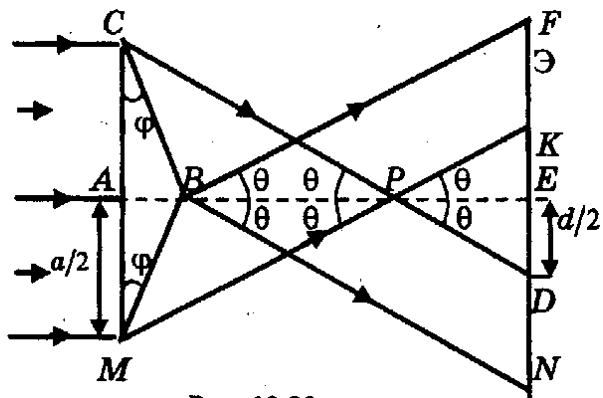


Рис. 12.22

Решение.

Указанную равнобедренную призму можно считать составленной из двух призм с общим основанием AB и малым преломляющим углом φ (рис. 12.22). В задаче 12.10 было показано, что если преломляющий угол мал, то угол отклонения любого луча от первоначального направления $\theta = (n - 1)\varphi$. Так как на верхнюю призму падает параллельный пучок, то после преломления в призме он остается параллельным (крайние лучи этого пучка – CD и BN). Совершенно аналогично параллельный пучок, падающий на нижнюю призму, остается параллельным (его крайние лучи – BF и MK). Как видно из рис. 12.22, на экране образуется темная полоса KD .

$$\text{Из } \triangle KPE: PE = \frac{KE}{\operatorname{tg} \theta} = \frac{d}{2 \operatorname{tg} \theta}.$$

$$\text{Из } \triangle APM: AP = \frac{AM}{\operatorname{tg} \theta} = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \theta}.$$

$$\text{По условию задачи } AP + PE = L \Rightarrow \frac{a}{2 \operatorname{tg} \theta} + \frac{d}{2 \operatorname{tg} \theta} = L \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a + d) = 2L \operatorname{tg} \theta. \text{ Так как угол } \theta \text{ – мал, то } \operatorname{tg} \theta = \theta. \text{ Подставляя } \theta = (n - 1)\varphi, \text{ получаем уравнение}$$

$$(a + d) = 2L(n - 1)\varphi \Rightarrow \varphi = \frac{a + d}{2L(n - 1)} = 5,26 \cdot 10^{-2} \text{ рад} = 3^\circ.$$

Задача 12.12. Точка S находится на главной оптической оси рассеивающей линзы. Фокусное расстояние линзы – 40 см, а расстояние от линзы до изображения точки – 30 см. На каком расстоянии от линзы расположена точка S ?

Решение.

Воспользуемся формулой тонкой линзы $\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}$, где

F – фокусное расстояние, d – расстояние от источника до линзы, f – расстояние от линзы до изображения. Искомое расстояние $d = \frac{Ff}{f - F}$. Так как линза является рассеивающей, то в по-

лученную формулу надо подставить $F = -40$ см, $f = -30$ см. Тогда

$$d = \frac{(-40) \cdot (-30)}{-30 - (-40)} = 120 \text{ см.}$$

Задача 12.13. Дана рассеивающая линза, у которой задано положение главной оптической оси (положение фокусов не задано). AB – луч, падающий на линзу, BK – этот же луч после преломления в линзе. Построить ход луча CD после преломления в линзе.

Решение.

Построим луч MN , идущий вдоль оптической оси линзы и параллельный лучу AB (рис. 12.23). В точке P пересекаются продолжения лучей BK и MN , причем точка P расположена в фокальной плоскости линзы. Плоскость, перпендикулярная главной оптической оси и проходящая через точку P , является

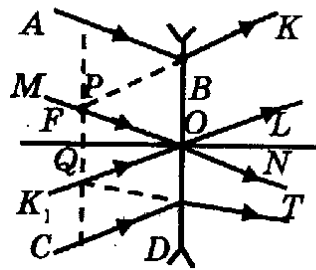


Рис. 12.23

фокальной плоскостью. Проведем луч K_1L , идущий вдоль оптической оси и параллельный лучу CD . Луч CD после преломления в линзе идет так, что его продолжение пересекается с лучом K_1L в точке Q , принадлежащей фокальной плоскости линзы. Таким образом, DQ – продолжение искомого луча, а DT – искомый луч.

Задача 12.14. Дана собирающая линза с фокусным расстоянием F . Построить график зависимости f (расстояние от изображения до линзы) от d (расстояние от предмета до линзы).

Решение.

Из формулы тонкой линзы $\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}$ выражаем

$f(d) = \frac{Fd}{d - F}$. Таким образом, $f(d)$ является рациональной функцией. Для построения графика преобразуем последнее выражение следующим образом: $f(d) = \frac{Fd}{d - F} =$

$$= F \left(\frac{d - F + F}{d - F} \right) = F \left(1 + \frac{F}{d - F} \right).$$

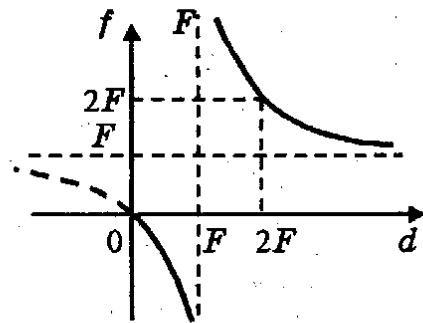


Рис. 12.24

строения графика $f(d)$ сначала необходимо построить график $\frac{1}{d}$, сдвинуть его на F вправо по оси абсцисс, умножить на F , сдвинуть на 1 по оси ординат и умножить на F .

Окончательный вид графика функции $f(d)$ приведен на рис. 12.24.

График представляет собой две ветви гиперболы и иллюстрирует важнейшие свойства изображений, получаемых в собирающих линзах.

1. Если предмет находится между линзой и фокусом, т.е. $0 < d < F$, то его изображение – мнимое: $f < 0$.

2. Если предмет находится в фокусе линзы, изображения предмета не существует. При приближении предмета к фокусу, т.е. $d \rightarrow F$, изображение стремится к бесконечности: $f \rightarrow \pm\infty$.

3. Если предмет находится за фокусом линзы, т.е. $d > F$, его изображение действительное: $f > 0$. При увеличении расстояния от предмета до линзы, его изображение приближается к фокусу линзы: $f \rightarrow F$.

4. Если предмет находится на двойном фокусном расстоянии от линзы, т.е. $d = 2F$, то изображение получается по другую сторону от линзы также на двойном фокусном расстоянии: $f = 2F$.

Задача 12.15. Дана собирающая линза с фокусным расстоянием, равным F . Построить график зависимости увеличения линзы Γ от d (расстояние от предмета до линзы).

Решение.

В задаче 12.14 было показано, что расстояние от изображения до линзы выражается формулой $f(d) = \frac{Fd}{d - F}$.

Увеличение линзы $\Gamma = \left| \frac{f}{d} \right| = \left| \frac{F}{d - F} \right|$. Для построения этого

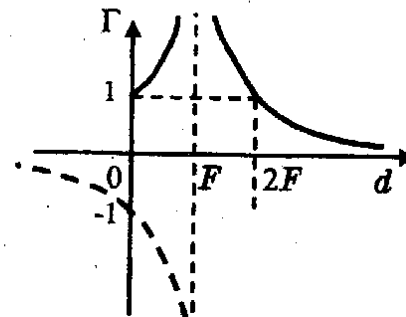


Рис. 12.25

графика сначала необходимо построить график $\frac{F}{d - F}$ по методике, изложенной в задаче 12.14. Затем часть графика, расположенную под осью абсцисс, отобразить симметрично относительно этой оси. Окончательный вид графика зависимости $\Gamma(d)$

представлен на рис. 12.25.

Этот график иллюстрирует *важнейшие свойства увеличения, получаемого при помощи собирающей линзы.*

1. Если предмет расположен между линзой и фокусом, т.е. $0 < d < F$, получается мнимое увеличенное изображение: $\Gamma > 1$.

2. Если предмет находится на расстоянии $F < d < 2F$ от линзы, то изображение действительное и увеличенное: $\Gamma > 1$.

3. Если предмет находится на двойном фокусном расстоянии от линзы, т.е. $d = 2F$, то изображение действительное, расположено также на двойном фокусном расстоянии от линзы: $f = 2F$ и размер изображения равен размеру предмета: $\Gamma = 1$.

4. Если предмет находится на расстоянии $d > 2F$, то изображение действительное уменьшенное: $\Gamma < 1$.

Преобразуем формулу для увеличения, разделив числитель и знаменатель на F , тогда $\Gamma = \left| \frac{F}{d-F} \right| = \left| \frac{1}{d/F-1} \right|$. Из полученной формулы видно, что увеличение линзы возрастает с увеличением ее фокусного расстояния.

Задача 12.16. На экране, расположенном на расстоянии $f = 60$ см от собирающей линзы, получено изображение точечного источника, расположенного на главной оптической оси

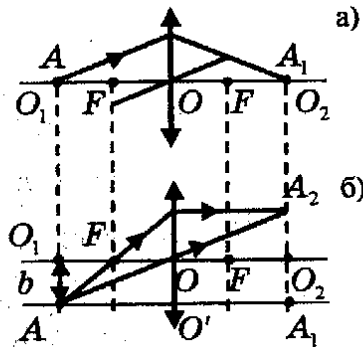


Рис. 12.26

и $d > F$, где d – расстояние от точки A до линзы

а) линзы. На какое расстояние переместится изображение на экране, если при неподвижном источнике переместить линзу в плоскости, перпендикулярной главной оптической оси, на $b = 2$ см? Фокусное расстояние линзы $F = 20$ см.

Решение.

По условию задачи изображение A_1 точки A получено на экране, следовательно, это изображение действительное и

(рис. 12.26-а). Из формулы тонкой линзы $\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}$ находим

$$d = \frac{Ff}{f-F} = 30 \text{ см.}$$

Когда линзу перемещают перпендикулярно ее оси, то вместе с ней смещаются и главная оптическая ось, и фокус линзы. На рис. 12.26-б: O_1O_2 – новое положение главной оптической оси линзы, A_2 – новое изображение точки A на экране, A_1A_2 – смещение изображения. Из подобия $\Delta AOO'$ и ΔAA_1A_2 получаем

$$\frac{AO'}{AA_1} = \frac{OO'}{A_1A_2}, \quad \text{где } AO' = AO = d = 30 \text{ см,}$$

$$AA_1 = AO' + O'A_1 = AO + OA_1 = d + f = 90 \text{ см,}$$

$$OO' = b = 2 \text{ см.} \quad \text{Из пропорции находим}$$

$$A_1A_2 = \frac{AA_1 \cdot OO'}{AO'} = 6 \text{ см.}$$

Задача 12.17. Расстояние от освещенного предмета до экрана $L = 100$ см. Линза, помещенная между ними, дает четкое изображение предмета на экране при двух положениях, расстояние между которыми $l = 20$ см. Найти фокусное расстояние линзы (рис. 12.27).

Решение.

Так как изображение получено на экране, то оно является действительным, следовательно, линза является собирающей.

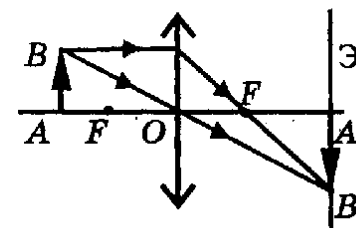


Рис. 12.27

AB – предмет, A_1B_1 – его изображение, тогда $AO = d$ и $A_1O = f$, причем по условию задачи $f + d = L$. Поэтому $f(d) = L - d$. График этой зависимости – прямая линия. Кроме того, из формулы тонкой

линзы $f(d) = \frac{Fd}{d-F}$. График этой зависимости был по-

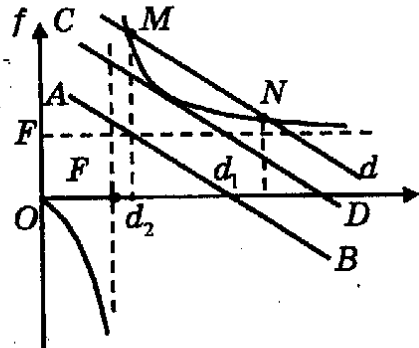


Рис. 12.28

до линзы (прямая MN).

Найдем эти точки из уравнения $\frac{Fd}{d-F} = L-d \Rightarrow d^2 - Ld + LF = 0$. Дискриминант этого уравнения $D = L^2 - 4LF = L^2 \left(1 - \frac{4F}{L}\right)$. Уравнение будет иметь решения, если $D \geq 0 \Rightarrow L^2 \left(1 - \frac{4F}{L}\right) \geq 0 \Rightarrow 4F \leq L$, что в нашей задаче выполняется.

Решения запишутся в виде: $d = \frac{1}{2} \left(L \pm \sqrt{L^2 \left(1 - \frac{4F}{L}\right)} \right) = \frac{L}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4F}{L}} \right)$, причем оба корня положительны. Разность этих корней $d_1 - d_2$, по условию задачи, равна l , откуда $\frac{L}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4F}{L}} \right) - \frac{L}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4F}{L}} \right) = l \Rightarrow$

строен в задаче 12.14. Графики обеих зависимостей представлены на рис. 12.28.

Прямая $f(d) = L - d$ может не иметь ни одной общей точки с гиперболой (прямая AB), одну общую точку (прямая CD), две общие точки, соответствующие двум разным расстояниям от предмета

$$\begin{aligned} \Rightarrow L \sqrt{1 - \frac{4F}{L}} = l &\Rightarrow 1 - \frac{4F}{L} = \frac{l^2}{L^2} \Rightarrow \frac{4F}{L} = 1 - \frac{l^2}{L^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow F = \frac{L^2 - l^2}{4L} &= 24 \text{ см.} \end{aligned}$$

Задача 12.18. Расстояние между двумя точечными источниками света $L = 36$ см. Где между ними надо поместить собирающую линзу с фокусным расстоянием $F = 10$ см, чтобы изображения обоих источников получились в одной точке?

Решение.

Так как линза расположена между источниками, то их действительные изображения совпадать не могут. Не могут совпадать и их мнимые изображения. Остается только одна возможность, когда изображение одного источника – действительное, другого – мнимое.

Пусть d_1 и d_2 – расстояния от источников до линзы. Предположим для определенности, что изображение первого источника – действительное, а изображение второго – мнимое, расстояния от изображений до линзы соответственно – f_1 и f_2 , причем $f_1 > 0$, $f_2 < 0$. Применяя формулу линзы, выражаем

$$f_1 = \frac{d_1 F}{d_1 - F} \quad \text{и} \quad f_2 = \frac{d_2 F}{d_2 - F}. \quad \text{По условию задачи}$$

$$f_1 = -f_2 \Rightarrow \frac{d_1 F}{d_1 - F} = -\frac{d_2 F}{d_2 - F} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_1(F - d_2) = d_2(d_1 - F) \Rightarrow F(d_1 + d_2) = 2d_1 d_2.$$

Из условия следует, что $d_1 + d_2 = L$. После подстановки получаем систему

$$\begin{cases} 2d_1 d_2 = FL, \\ d_1 + d_2 = L, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2d_1(L - d_1) = FL, \\ d_2 = L - d_1, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2d_1^2 - 2Ld_1 + FL = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (d_1)_{1,2} = \frac{L \pm \sqrt{L^2 - 2FL}}{2} = \frac{L}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2F}{L}} \right).$$

$$\begin{cases} (d_1)_1 = 30 \text{ см,} \\ (d_2)_1 = 6 \text{ см.} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (d_1)_2 = 6 \text{ см,} \\ (d_2)_2 = 30 \text{ см.} \end{cases}$$

Задача 12.19. На экране с помощью тонкой линзы получили изображение предмета с увеличением $\Gamma_1 = 2$. Предмет передвинули на 1 см. Для того, чтобы получить резкое изображение, пришлось передвинуть экран. При этом увеличение оказалось равным $\Gamma_2 = 4$. На какое расстояние пришлось передвинуть экран?

Решение.

В обоих случаях изображения получаются на экране, следовательно, изображения – действительные, линза является собирающей. В первом случае по формуле линзы получаем:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1}, \text{ где } d_1 - \text{расстояние от предмета до линзы, } f_1 -$$

расстояние от изображения до линзы, F – фокусное расстояние;

$$\Gamma_1 = \left| \frac{f_1}{d_1} \right| = \frac{f_1}{d_1}.$$

Аналогично для второго случая получаем:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2} \text{ и } \Gamma_2 = \left| \frac{f_2}{d_2} \right| = \frac{f_2}{d_2}.$$

В задаче 12.15 было показано, что при $d > F$ увеличение $\Gamma(d)$ является убывающей функцией (см. рис. 12.25), поэтому из условия $\Gamma_2 > \Gamma_1$ следует, что $d_2 < d_1$, следовательно, $d_1 - d_2 = 1$ см.

В задаче 12.14 установлено, что при $d > F$ функция $f(d)$ (расстояние от изображения до линзы) является убывающей (см. рис. 12.24), поэтому $f_2 > f_1$. Расстояние, на которое необходимо сместить экран – $(f_2 - f_1)$.

Приравняв правые части выражений для $1/F$, получим

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2} \Rightarrow \frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} = \frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{f_2 - f_1}{f_2 f_1} &= \frac{d_1 - d_2}{d_1 d_2} \Rightarrow f_2 - f_1 = \left(\frac{f_2 f_1}{d_1 d_2} \right) (d_1 - d_2) = \\ &= \left(\frac{f_1}{d_1} \right) \left(\frac{f_2}{d_2} \right) (d_1 - d_2) = \Gamma_1 \Gamma_2 (d_1 - d_2) = 8 \text{ см.} \end{aligned}$$

Задача 12.20. Вдоль главной оптической оси тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 12$ см расположен предмет, один конец которого находится на расстоянии $d_1 = 17,9$ см от линзы, а другой – на расстоянии $d_2 = 18,1$ см.

Определить увеличение k изображения.

Решение.

Оба конца предмета расположены на расстояниях $d > F$ от линзы, поэтому изображение всего предмета в собирающей линзе будет действительным. Так как предмет расположен вдоль главной оптической оси, то и его изображение будет получено вдоль этой оси. Изображения концов предмета находятся на расстояниях $f_1 = \frac{F d_1}{d_1 - F}$ и $f_2 = \frac{F d_2}{d_2 - F}$ от линзы, причем из-за убывания функции $f(d)$ при $d > F$ $f_2 < f_1$. Размер предмета равен $(d_2 - d_1)$, а размер изображения – $(f_1 - f_2)$.

В данной задаче речь идет не о поперечном увеличении линзы, а о продольном. Очевидно, что оно равно $k = \frac{f_1 - f_2}{d_2 - d_1} =$

$$= \left(\frac{F d_1}{d_1 - F} - \frac{F d_2}{d_2 - F} \right) \frac{1}{d_2 - d_1} = \frac{F^2}{(d_1 - F)(d_2 - F)} = 4.$$

Задача 12.21. Стальной шарик свободно падает с высоты $h = 0,8$ м на собирающую линзу и разбивает ее. В начальный момент времени расстояние от шарика до линзы равнялось расстоянию от линзы до действительного изображения шарика. Сколько времени существовало мнимое изображение шарика?

Решение.

Пусть F – фокусное расстояние линзы, тогда $\frac{1}{F} = \frac{1}{h} + \frac{1}{f}$. По условию задачи $h = f$,

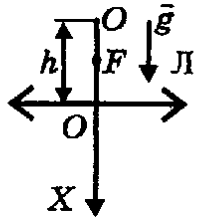


Рис. 12.29

следовательно, $\frac{1}{F} = \frac{2}{h} \Rightarrow F = \frac{h}{2}$ (шарик

в начальный момент времени находился на двойном фокусном расстоянии). Мнимое изображение существует, когда шарик находится между фокусом и линзой. Свободное падение шарика описывается формулой

мулой $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{gt^2}{2} = \frac{gt^2}{2}$ (рис. 12.29). В момент

удара о линзу $x = h = \frac{gt_n^2}{2}$, где t_n – время падения шарика,

следовательно, $t_n = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. В точке F $x = \frac{h}{2} = \frac{gt_F^2}{2}$, где

$t_F = \sqrt{\frac{h}{g}}$ – время движения на участке OF . Шарик находится между фокусом и линзой в течение

$$t_k = t_n - t_F = \sqrt{\frac{2h}{g}} - \sqrt{\frac{h}{g}} = \sqrt{\frac{h}{g}}(\sqrt{2} - 1) = 0,1 \text{ с.}$$

Задача 12.22. На рис. 12.30 изображен отрезок AB , расположенный на главной оптической оси тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием F . Построить изображение этого отрезка в линзе.

Решение.

Так как точка A расположена за фокусом линзы, то ее изображение действительное. Для построения изображения точки A строим произвольный луч AC , проводим параллельно ему побочную оптическую ось MN , которая пересекает фокальную плоскость в точке K . CK – ход луча AC после преломления в линзе, A_1 – изображение точки A . Аналогично можно по-

строить действительные изображения всех точек, принадлежащих участку $[AF]$. При приближении к фокусу F изображение

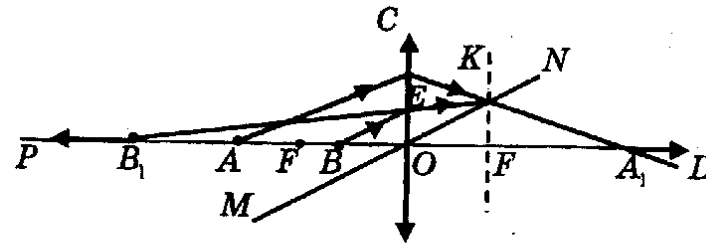


Рис. 12.30

точек участка $[AF]$ устремляется к бесконечности (см. задачу 12.14, рис. 12.24). Таким образом, участок $[AF]$ изображается в линзе в виде луча A_1D .

Точка B расположена между линзой и фокусом, поэтому ее изображение будет мнимым. Проведем луч $BE \parallel MN$. KE – ход луча BE после преломления в линзе, B_1 – мнимое изображение точки B . Аналогично строятся мнимые изображения всех точек, принадлежащих участку $[BF]$. По мере приближения к фокусу изображения точек этого участка устремляются к бесконечности, и участок $[BF]$ изображается в виде луча B_1P .

Итак, отрезок AB изображается в линзе в виде двух лучей: действительного луча A_1D и мнимого B_1P .

Задача 12.23. Источник света находится на расстоянии $a = 35$ см от собирающей линзы с фокусным расстоянием $F_1 = 20$ см. По другую сторону линзы на расстоянии $b = 38$ см расположена рассеивающая линза с фокусным расстоянием $F_2 = 12$ см (рис.12.31). Где будет находиться изображение источника?

Решение.

Изображение источника S можно построить на основании методики, изложенной в предыдущих задачах. Рассмотрим ход луча SA . Проводим $NO_1 \parallel SA$, проходящий через оптиче-

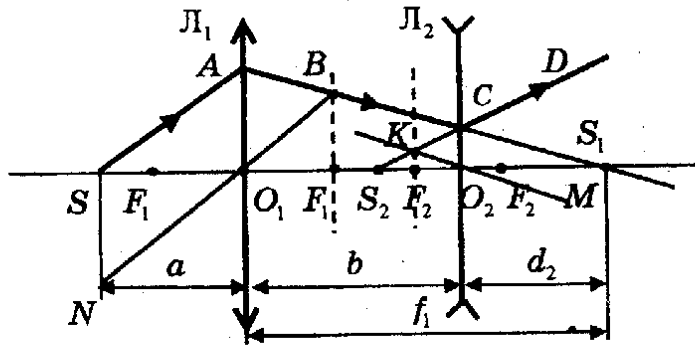


Рис. 12.31

ский центр линзы L_1 . Он пересекает фокальную плоскость этой линзы в точке B . AB – ход луча SA после преломления в линзе L_1 . Этот луч попадает на рассеивающую линзу L_2 в точке C . Через оптический центр O_2 линзы L_2 проводим луч $O_2M \parallel BC$. Он пересекает фокальную плоскость линзы L_2 в точке K . KC – продолжение луча после преломления в линзе, CD – его ход после линзы L_2 . Продолжение луча CD пересекает оптическую ось системы линз в точке S_2 . S_2 – мнимое изображение источника S в системе, состоящей из собирающей и рассеивающей линз.

Найдем положение точки S_1 (изображение предмета в собирающей линзе). Пусть $S_1O_1 = f_1$ (расстояние от изображения S_1 до линзы L_1). По формуле тонкой линзы $\frac{1}{F_1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{f_1} \Rightarrow f_1 = \frac{F_1 a}{a - F_1} = 46,6$ см.

Расстояние $O_2S_1 = f_1 - b = (46,6 - 38) = 8,6$ см $= d_2$, причем S_1 играет роль мнимого источника для рассеивающей лин-

зы. Поэтому $\frac{1}{F_2} = \frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2} \Rightarrow f_2 = \frac{F_2 d_2}{d_2 - F_2}$. Так как линза рассеивающая, а источник мнимый, то $F_2 = -12$ см, $d_2 = -8,6$ см. После подстановки находим, что $f_2 = 30,3$ см.

Итак, мнимое изображение источника будет находиться на расстоянии $f_2 = 30,3$ см влево от линзы L_2 .

Задача 12.24. Оптическая система состоит из собирающей линзы с фокусным расстоянием F и зеркального шара радиусом R , центр которого находится на оптической оси линзы на расстоянии $d > F$ от нее. На каком расстоянии от линзы нужно расположить источник света S на оптической оси системы, чтобы его изображение совпало с самим источником?

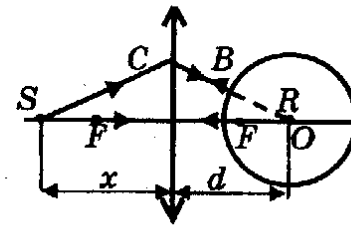


Рис. 12.32

чтобы его изображение совпало с самим источником?

Решение.

Рассмотрим случай, изображенный на рис. 12.32, когда $d < R + F$. Если после преломления в линзе луч будет падать на зеркальный шар по направлению его радиуса, то, отразившись от шара, он пройдет тем же путем, но в обратном направлении.

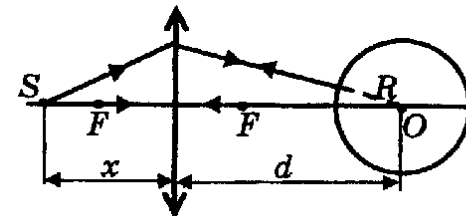


Рис. 12.33

Изображение источника света S в системе, состоящей из линзы и шара, совпадает с источником. Итак, в этом случае изображение источника

света в линзе будет находиться в точке O . Применяя формулу тонкой линзы, получаем $\frac{1}{F} = \frac{1}{x} + \frac{1}{f}$, где $f = d$. Отсюда

$$x = \frac{Ff}{f - F} = \frac{Fd}{d - F}$$

Пусть $d > R + F$. На рис. 12.33 изображен случай, аналогичный рассмотренному выше, из которого следует, что

$$x = \frac{Fd}{d - F}$$

Однако, при $d > R + F$ возможен и другой вариант.

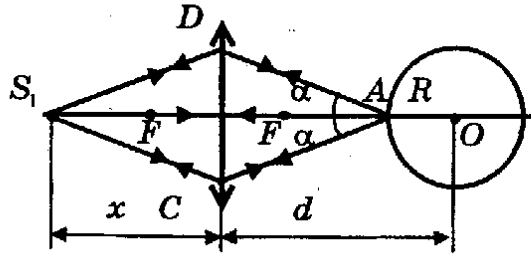


Рис. 12.34

В случае, представленном на рис. 12.34, изображение источника света S в линзе получается в точке A . В силу симметрии луч, который первоначально шел по пути SDA , после отражения от

шара пойдет по пути ACS , а луч, который проходил путь SCA , отразившись от шара в точке A , пройдет путем ADS . Таким образом, в этом случае изображение источника света S в системе, состоящей из линзы и шара, совпадает с источником.

Изображение источника S в линзе будет находиться в точке A , если выполняется уравнение $\frac{1}{F} = \frac{1}{x} + \frac{1}{f}$, где

$$f = d - R. \text{ Отсюда находим, что } x = \frac{Ff}{f - F} = \frac{F(d - R)}{d - R - F}.$$

Задача 12.25. При аэрофотосъемках используется фотоаппарат, объектив которого имеет

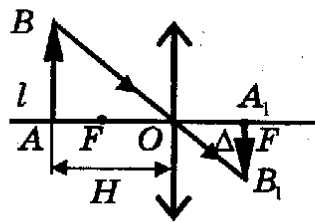


Рис. 12.35

фокусное расстояние $F = 8$ см. Разрешающая способность пленки $\Delta = 10^{-2}$ мм. На какой высоте должен лететь самолет, чтобы на фотографии можно было различить листья деревьев размером $l = 5$ см? При какой

скорости самолета изображение не будет размытым, если время экспозиции $\tau = 10^{-3}$ с?

Решение.

H – высота, на которой летит самолет, f – расстояние от пленки до объектива. По формуле линзы получаем $\frac{1}{H} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$. Так как $f \ll H$, то $\frac{1}{H} \ll \frac{1}{f} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{F} \Rightarrow f = F, \text{ т.е. изображение получается в фокальной}$$

плоскости. Расстояние между двумя соседними листьями можно взять равным l . На пленке это расстояние должно получиться не меньше Δ (рис. 12.35). Из подобия треугольников AOB и A_1OB_1 , получаем $\frac{\Delta}{l} = \frac{F}{H} \Rightarrow H = F \frac{l}{\Delta} = 400$ м.

Изображение считается неразмытым, если за время экспозиции оно смещается не больше, чем на Δ . За время экспозиции смещение любой точки листьев равно $v\tau$, где v – скорость самолета, тогда и смещение изображения равно $\frac{F}{H}(v\tau)$. Из условия неразмытости изображения получаем неравенство

$$\frac{F}{H} v\tau \leq \Delta \Rightarrow v \leq \frac{H\Delta}{F\tau} = 100 \text{ м/с} = 360 \text{ км/ч}.$$

Задача 12.26. Дальзоркий человек видит резко предметы, расположенные не ближе $d = 1$ м от него. В каких очках он нуждается, чтобы читать газету, держа ее на расстоянии $d_0 = 25$ см от глаз?

Решение.

Расстояние от предмета (газеты) до линзы $d_0 = 25$ см. В данном случае линза очков должна создать мнимое прямое изображение предмета, находящееся на расстоянии $d = 1$ м от человека, причем это есть расстояние от изображения до линзы. По формуле тонкой линзы получаем: $D = \frac{1}{d_0} + \frac{1}{f} = \frac{1}{d_0} - \frac{1}{d}$ (знак минус берем потому, что изображение должно быть мнимым).

$$\text{Итак, } D = \left(\frac{1}{0,25} - \frac{1}{1} \right) = +3 \text{ дптр}.$$

13.1. Основные свойства волновых процессов

Волной называют колебания, распространяющиеся в пространстве с течением времени. При распространении волны наблюдается периодичность колебаний во времени и пространстве, при этом происходит перемещение определенного состояния колеблющейся среды, но не перенос вещества.

Волны распространяются в пространстве с конечной скоростью. Электромагнитные волны распространяются в вакууме со скоростью света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

В поперечной волне колебания совершаются в направлении, перпендикулярном распространению волны. Электромагнитные волны поперечны.

В продольной волне колебания совершаются в направлении распространения волны.

Важнейшим свойством всех волн независимо от их природы является перенос энергии, поступающей от источника колебаний. При этом не происходит переноса вещества.

Длиной волны λ называется наименьшее расстояние между двумя точками волны, колеблющимися в одинаковых фазах. Скорость распространения волны v , ее длина λ и частота ν связаны отношением:

$$v = \lambda \nu \tag{13.1}$$

Поверхности, на которых совершаются колебания в одинаковых фазах, называются волновыми поверхностями. Линия, перпендикулярная волновой поверхности, называется лучом. Луч указывает направление распространения волны, т.е. направление, в котором волна переносит энергию.

13.2. Волновые свойства света

Уравнение плоской волны.

Если волновая поверхность – плоскость, то говорят о плоской волне. Пусть плоская волна распространяется в направлении X , тогда ее уравнение записывают в виде:

$$s(x, t) = A \cos \left(\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \right) \tag{13.2}$$

где s – отклонение частиц в волне, v – скорость волны, ω – ее круговая частота, A – амплитуда колебаний, x – расстояние, пройденное волной от источника колебаний.

В формуле (13.2) $\omega \left(t - \frac{x}{v} \right)$ – фаза колебаний. Это выражение можно переписать в виде:

Уравнение плоской волны преобразуется как

$$\begin{aligned} \omega t - \frac{\omega}{v} x &= \omega t - \frac{(2\pi/T)}{v} x = \omega t - \frac{2\pi\nu}{v} x = \\ &= \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x = \omega t - kx, \text{ где } k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ – волновое число.} \end{aligned}$$

$$s(x, t) = A \cos(\omega t - kx) \tag{13.3}$$

Если волновая поверхность – сфера, то волна называется сферической. На больших расстояниях от источника колебаний сферическую волну можно считать плоской.

Интерференция волн. Интерференция света.

В ряде явлений можно наблюдать сложение нескольких волн. При этом выполняется принцип суперпозиции: результирующее колебание представляет собой сумму колебаний, вызванных каждой волной в отдельности.

В некоторых случаях при сложении волн в пространстве образуется постоянное во времени распределение амплитуд результирующих колебаний. Это явление называется интерференцией волн. Постоянное во времени распределение амплитуд результирующих колебаний называется интерференционной картиной.

Интерференционная картина возникает только тогда, когда происходит взаимодействие когерентных волн, т.е. волн, полученных от источников с одинаковыми частотами и имеющими постоянную разность фаз во времени.

Рассмотрим в качестве иллюст-

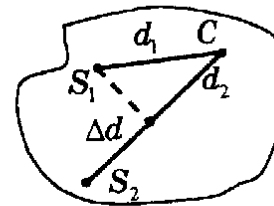


Рис. 13.1

рации два когерентных источника волн S_1 и S_2 , у которых разность фаз $\Delta\varphi = 0$. Расстояния от источников до точки C , в которой рассматривается сложение волн, d_1 и d_2 (рис. 13.1). Если в точку C волны приходят в одинаковых фазах, то они при сложении усилят друг друга, и в точке C будет наблюдаться интерференционный максимум. Для этого необходимо, чтобы разность хода волн $\Delta d = d_1 - d_2$ была равна целому числу волн:

$$\Delta d = k\lambda \quad (13.4)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$. Формула (13.4) называется условием интерференционных максимумов.

Если же разность хода равна нечетному числу полуволен, то в точку C волны придут в противоположных фазах, что приведет к уменьшению амплитуды результирующих колебаний. Таким образом, условие интерференционных минимумов запишется в виде:

$$\Delta d = (2k + 1)\frac{\lambda}{2} \quad (13.5)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$

Если разность хода волн Δd принимает значения, отличные от тех, которые получены по формулам (13.4) и (13.5), то амплитуда колебаний равна некоторому промежуточному значению между минимальной и максимальной амплитудами.

Характерным признаком интерференции является перераспределение энергии в пространстве: в некоторые точки энергия может не поступать, а в интерференционных максимумах энергия колебаний больше суммы энергий, переносимой каждой волной.

Интерференцию можно наблюдать для волн любой природы, в том числе и для световых волн. В оптике трудно получить независимые когерентные источники света, так как обычные источники (не лазеры) испускают волны с быстро и случайно изменяющейся фазой. Поэтому для получения интерференционной картины свет от одного источника разделяют на два пучка, а затем производят их наложение друг на друга.

Дифракция волн. Дифракция света.

Отклонение от прямолинейного распространения, огибание волнами препятствий называется дифракцией. Дифракция волн наблюдается, когда длина волны становится сравнимой или больше размеров препятствий, встречающихся на пути распространения волны. Дифракцию можно наблюдать для волн любой природы, в том числе и световых.

Дифракция волн объясняется на основании принципа Гюйгенса-Френеля: каждая точка среды, до которой дошло волновое возмущение, сама становится источником вторичных волн, причем поверхность, касательная ко всем вторичным волнам (волновая поверхность), в любой момент времени представляет собой результат интерференции вторичных волн.

Дифракционная решетка.

На явлении дифракции основано устройство оптического прибора – дифракционной решетки. Она представляет собой совокупность большого числа очень узких прозрачных щелей, разделенных непрозрачными промежутками. Период решетки d – это ширина прозрачной щели и непрозрачного промежутка.

Пусть на дифракционную решетку падает плоская волна длиной λ . Тогда каждая щель становится источником вторичных сферических волн, распространяющихся по всем направле-

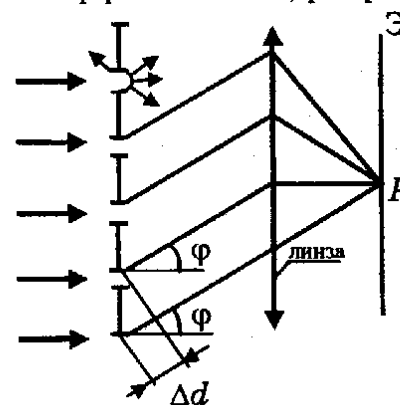


Рис. 13.2

ниям. В точку P на экране \mathcal{E} при помощи линзы собираются все вторичные волны, распространяющиеся параллельно под углом φ к первоначальному направлению (рис. 13.2). В точке P будет наблюдаться интерференция этих волн. Интерференционные максимумы получаются в том случае, если разность хода $\Delta d = d \sin \varphi$ равна целому числу волн:

$$d \sin \varphi = k\lambda \quad (13.6)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$

При $k = 0$ и $\varphi = 0$ в центре экрана располагается центральный максимум; при $k = 1$ симметрично относительно центрального максимума расположатся два максимума первого порядка; при $k = 2$ – два максимума второго порядка и т.д. Следует отметить, что при заданном значении длины световой волны λ и периоде дифракционной решетки d порядок максимума может принимать ограниченные значения. Действительно, из формулы (13.6) следует, что $\sin\varphi = \frac{k\lambda}{d} \leq 1 \Rightarrow k \leq \frac{d}{\lambda}$.

При падении белого света на дифракционную решетку условие (13.6) для разных длин волн будет наблюдаться в различных точках экрана. Поэтому дифракционная решетка раскладывает белый свет в спектр.

Дисперсия света. Поляризация света.

Волновые свойства света подтверждаются также явлениями дисперсии и поляризации.

Дисперсия света – это зависимость показателя преломления от длины волны света.

Установлено, что свет – это поперечная электромагнитная волна. В естественном свете колебания вектора напряженности электрического поля \vec{E} (как и вектора индукции магнитного поля) происходят во всех возможных направлениях, перпендикулярных направлению распространения волны. В поляризованной световой волне колебания вектора \vec{E} происходят в определенной плоскости – плоскости поляризации.

13.3. Квантовые свойства света

При распространении света проявляются его волновые свойства. При испускании и поглощении света проявляются его корпускулярные свойства. Оказалось, что свет (как любое другое электромагнитное излучение) испускается и поглощается определенными порциями – квантами. Энергия каждой порции

$$W = h\nu \quad (13.7)$$

где ν – частота излучения, $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка. Эта порция света обладает свойствами частицы с массой покоя, равной нулю, ее называют фотоном.

Согласно теории относительности масса фотона

$$m = \frac{W}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2}, \quad (13.8)$$

где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость света в вакууме.

Как и любая движущаяся частица, фотон обладает импульсом

$$p = mc = \frac{h\nu}{c^2} c = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}. \quad (13.9)$$

Вектор импульса фотона направлен по световому лучу.

13.4. Законы фотоэффекта. Уравнение Эйнштейна

Корпускулярные свойства света позволили объяснить явление фотоэффекта. Фотоэффектом называют вырывание электронов из вещества под действием света. При изучении фотоэффекта были экспериментально установлены два закона:

1. Количество электронов, вырываемых светом с поверхности металла за 1 секунду, пропорционально поглощаемой за это время энергии световой волны (световому потоку).
2. Максимальная кинетическая энергия вырванных светом электронов линейно возрастает с частотой света и не зависит от его интенсивности.

Фотоэффект изучают в замкнутой электрической цепи, содержащей металлическую пластинку К (катод) – источник фотоэлектронов – и А (анод), на который подают по-

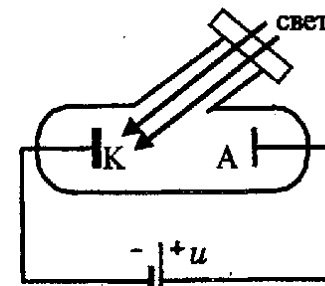


Рис. 13.3

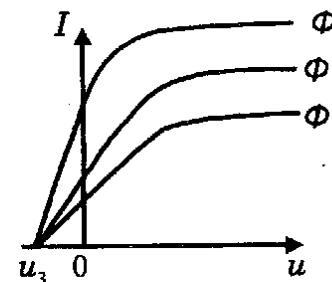


Рис. 13.4

ложительный относительно катода потенциал (рис. 13.3).

График зависимости тока от напряжения между катодом и анодом при различных световых потоках приведен на рис. 13.4.

При $u = 0$ в цепи протекает некоторый ток, так как вырванные под действием света из катода фотоэлектроны могут иметь скорости, направленные в сторону анода. С увеличением напряжения число достигших анода фотоэлектронов увеличивается, соответственно возрастает и ток в цепи. Однако, при заданном световом потоке из катода вырывается вполне определенное количество электронов, поэтому когда все они достигают анода, ток больше не увеличивается (достигает насыщения). Для прекращения фотоэффекта на анод и катод подают задерживающую разность потенциалов $u_3 < 0$, так что

$$\frac{m_e v^2}{2} = |e| |u_3| \quad (13.10)$$

где $\frac{m_e v^2}{2}$ – максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов, $|e|$ – модуль заряда электрона.

Для объяснения фотоэффекта Эйнштейн предложил уравнение

$$h\nu = A_b + \frac{m_e v^2}{2} \quad (13.11)$$

которое показывает, что энергия поглощенного металлом фотона $h\nu$ идет на совершение электроном работы выхода A_b и на со-

общение электрону кинетической энергии $\frac{m_e v^2}{2}$.

Если $h\nu < A_b$, то фотоэффекта не будет. Фотоэффект наблюдается при условии, что $h\nu \geq A_b$.

Наименьшая частота света для данного металла, при которой начинается фотоэффект, называется красной границей фотоэффекта. Ее находят из условия

$$h\nu_{кр} = A_b \Rightarrow \nu_{кр} = \frac{A_b}{h}$$

Соответствующая длина волны:

$$\lambda_{кр} = \frac{c}{\nu_{кр}} = \frac{ch}{A_b}$$

Фотоэффект наблюдается для частот $\nu \geq \nu_{кр}$ или для длин волн $\lambda \leq \lambda_{кр}$.

13.5. Примеры решения задач

Задача 13.1. Плоская волна представлена уравнением $s(x, t) = 0,05(1998t - 6x)$, где s – смещение частиц в см, t – время в секундах, x – расстояние в метрах по оси, вдоль которой распространяется волна. Определить разность фаз между колеблющимися точками, находящимися на расстоянии $\Delta x = 35$ см друг от друга.

Решение.

Сравнивая данное в условии задачи уравнение с уравнением плоской волны $s(x, t) = A \cos(\omega t - kx)$, находим, что волно-

вое число $k = \frac{2\pi}{\lambda} = 6 \text{ м}^{-1}$.

По определению минимальное расстояние в волне между двумя точками, совершающими колебания в одинаковых фазах, равно длине волны λ . Разность фаз колебаний этих точек равна 2π , следовательно, на единицу длины волны приходится разность фаз, равная $\frac{2\pi}{\lambda}$. Разность фаз между точками, расположенными на расстоянии Δx в волне:

$$\Delta\varphi = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) \Delta x = k\Delta x = 6 \text{ м}^{-1} \cdot 0,35 \text{ м} = 2,1 \text{ рад} = 120,3^\circ$$

Задача 13.2. Определить частоту звуковых колебаний в стали, если расстояние между ближайшими точками звуковой волны, отличающимися по фазе на $\Delta\varphi = \pi/2$, $l = 1,54$ см. Скорость звуковых волн в стали $v = 5000$ м/с.

Решение.

В задаче 13.1 было показано, что разность фаз между двумя точками волны, расположенными на расстоянии l , $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} l$, где λ – длина волны. Отсюда следует, то разность фаз $\pi/2$ соответствует точкам волны, расположенным на расстоянии $l = \lambda/4$. Следовательно, длина волны $\lambda = 4l$, а частота колебаний $\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{4l} = 8 \cdot 10^3 \text{ Гц} = 8 \text{ кГц}$.

Задача 13.3. Радиолокатор работает на длине волны $\lambda = 15 \text{ см}$ и испускает импульсы с частотой $\nu = 4 \text{ кГц}$. Длительность каждого импульса $\tau = 2 \text{ мкс}$. Какова наибольшая дальность обнаружения цели? Сколько колебаний содержится в одном импульсе?

Решение.

Зависимость напряженности поля E электромагнитного излучения от времени приведена на рис. 13.5.

Радиолокатор излучает электромагнитные волны частотой

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ м/с}}{15 \cdot 10^{-2} \text{ м}} = 2 \cdot 10^9 \text{ Гц}$$
 и периодом

$$T = \frac{1}{f} = 0,5 \cdot 10^{-9} \text{ с} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ мкс.}$$

Период следования импульсов:

$$T_n = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{4 \cdot 10^3 \text{ Гц}} = 0,25 \cdot 10^{-3} \text{ с} = 250 \text{ мкс.}$$

Пусть цель находится на расстоянии L от радиолокатора. Электромагнитный импульс проходит до цели и обратно расстояние $2L$, распространяясь со скоростью света c , затрачивая на это время $t = 2L/c$. При этом обратно на радиолокатор электромагнитный импульс должен вернуться до того, как будет излучен следующий импульс, т.е. $t \leq T_n \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{2L}{c} \leq T_n \Rightarrow L \leq \frac{cT_n}{2}$$

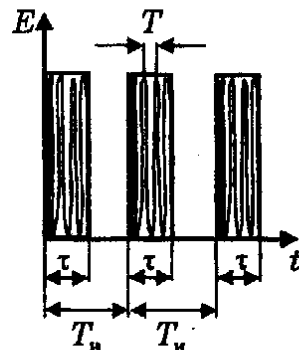


Рис. 13.5

Максимальная дальность

$$L_{\text{max}} = \frac{cT_n}{2} = 0,375 \cdot 10^5 \text{ м} = 37,5 \text{ км.}$$

Так как длительность одного электромагнитного импульса $\tau = 2 \text{ мкс}$, а период электромагнитных колебаний в импульсе $T = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ мкс}$, то в одном импульсе содержится

$$N = \frac{\tau}{T} = \frac{2 \text{ мкс}}{0,5 \cdot 10^{-3} \text{ мкс}} = 4000 \text{ колебаний.}$$

Задача 13.4. Самолет летит горизонтально на высоте $H = 4 \text{ км}$ со сверхзвуковой скоростью. Звук дошел до наблюдателя через $t = 10 \text{ с}$ после того, как над ним пролетел самолет. Определить скорость самолета, если скорость звука $v_0 = 330 \text{ м/с}$ (рис. 13.6).

Решение.

B – точка, в которой находится наблюдатель, A – точка, в которой находится самолет в момент времени t . Из каждой точки, которую пролетает самолет, распространяется сферическая звуковая волна. Если сложить все звуковые волны для момента, когда самолет находится в точке A , то получится волновая поверхность в виде ко-

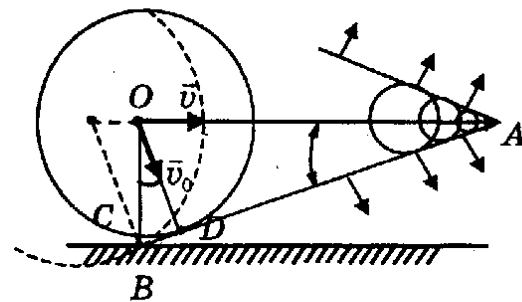


Рис. 13.6

По мере движения самолета эта поверхность (фронт волны) распространяется со скоростью звука v_0 . Это и есть ударная звуковая волна. На рис. 13.6 $OD \perp AB$, причем $OD = v_0 t$, $AO = vt$, $OB = H$ и

$$BD = \sqrt{OB^2 - OD^2} = \sqrt{H^2 - (v_0 t)^2}. \quad \angle BOD = \angle BAO$$

как углы с взаимно перпендикулярными сторонами. Поэтому прямоугольные треугольники BOD и BOA подобны. Из подобия следует, что

$$\frac{OA}{OD} = \frac{OB}{BD} \Rightarrow \frac{vt}{v_0 t} = \frac{H}{\sqrt{H^2 - (v_0 t)^2}} \Rightarrow v = \frac{Hv_0}{\sqrt{H^2 - (v_0 t)^2}}$$

Задача 13.5. Колебательный контур приемника состоит из катушки и конденсатора с площадью пластин $S = 800 \text{ см}^2$ и расстоянием $d = 1 \text{ мм}$ между ними, заполненного слюдой (диэлектрическая проницаемость $\epsilon = 7$). На какую длину волны настроен контур, если известно отношение максимального напряжения на конденсаторе к максимальному току в катушке $n = 100 \text{ В/А}$. Активным сопротивлением можно пренебречь.

Решение.

$$\text{Частота свободных колебаний в контуре } \nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}},$$

где $C = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d}$ – емкость конденсатора, а L – индуктивность

катушки, которую можно определить из условия сохранения энергии в контуре. Когда напряжение на конденсаторе максимально, т.е. $u = u_m$, вся энергия сосредоточена в электрическом

поле конденсатора и равна $W_3 = Cu^2/2$.

Если ток через катушку максимален, т.е. $I = I_m$, то вся энергия контура сосредоточена в магнитном поле катушки и равна $W_m = LI_m^2/2$.

$$\text{По закону сохранения энергии } W_3 = W_m \Rightarrow Cu_m^2/2 = LI_m^2/2 \Rightarrow L = C(u_m/I_m)^2 = Cn^2.$$

Таким образом, собственная частота контура

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{C^2 n^2}} = \frac{1}{2\pi Cn}$$

Контур настроен на длину волны λ электромагнитного излучения, частота которого $\nu = \nu_0$ (условие резонанса). Так как $\nu = c/\lambda$, где $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ – скорость света, то получаем уравнение:

$$\frac{c}{\lambda} = \frac{1}{2\pi Cn} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = 2\pi Cn \Rightarrow 2\pi Cn \left(\frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d} \right) = \frac{2\pi Cn\epsilon\epsilon_0 S}{d} = 933 \text{ м.}$$

Задача 13.6. Наблюдатель удаляется со скоростью v от источника звука с частотой ν . Какой частоты звук он будет воспринимать, если скорость звука v_0 ?

Решение.

Пусть в некоторый момент времени наблюдатель принимает звуковую волну в определенной фазе колебаний (например, ее максимум). Если бы наблюдатель был неподвижен, то следующий максимум колебаний он принял бы через время, равное периоду звуковых колебаний T . Но так как наблюдатель удаляется от источника, то он принимает следующий максимум колебаний через время $\tau > T$ на промежуток времени, необходимый для того, чтобы волна прошла расстояние $v\tau$, на которое смещается наблюдатель. Этот промежуток времени равен $\frac{v\tau}{v_0}$, где v_0 – скорость звука. Итак,

$$\tau - T = \frac{v}{v_0} \tau \Rightarrow \tau = T + \tau \frac{v}{v_0} \quad (*)$$

Таким образом, период звуковых колебаний, воспринимаемых наблюдателем, равен τ , а их частота – ν' , причем $\tau = 1/\nu'$.

Период излучаемых источником колебаний $T = 1/\nu$. Подставляя в формулу (*), получаем:

$$\frac{1}{\nu'} = \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu'} \frac{v}{v_0} \Rightarrow \frac{1}{\nu'} = \frac{1}{\nu'} \left(1 - \frac{v}{v_0} \right)$$

В итоге находим:

$$v' = v \left(1 - \frac{v}{v_0} \right) \quad (13.12)$$

Из формулы (13.12) видно, что наблюдатель принимает звук более низкой частоты. Если наблюдатель движется к источнику, то он будет принимать звук более высокой частоты. Рассмотренное выше справедливо и в том случае, когда неподвижен наблюдатель, а движется источник.

Это явление называется эффектом Доплера. Эффект Доплера можно наблюдать и для волн другой физической природы, например, для волн оптического диапазона.

Задача 13.7. Вдоль оси X распространяются в противоположных направлениях две плоские волны с одинаковой частотой ω и амплитудой A . Что получится в результате сложения этих волн?

Решение.

Уравнение одной из волн можно записать в виде: $s_1(x, t) = A \cos(\omega t - kx)$, тогда уравнение волны, распространяющейся навстречу: $s_2(x, t) = A \cos(\omega t + kx)$, где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ —

волновое число. В результате сложения получаем:

$$\begin{aligned} s(x, t) &= s_1 + s_2 = A \cos(\omega t - kx) + A \cos(\omega t + kx) = \\ &= A(\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx)) = \\ &= 2A \cos\left(\frac{(\omega t - kx) + (\omega t + kx)}{2}\right) \cos\left(\frac{(\omega t - kx) - (\omega t + kx)}{2}\right) = \\ &= 2A \cos \omega t \cos kx. \end{aligned}$$

Как видно, после сложения образуется волна $s(x, t)$ с амплитудой колебаний, равной $2A$. Отметим также, что $\cos kx = 0$ при $kx = \frac{\pi}{2} + \pi n = \frac{\pi}{2}(2n + 1)$, где $n = 0, 1, 2, \dots$ ($n < 0$ не подходит по смыслу задачи). Следовательно, в точках волны $x_n = \frac{\pi}{2k}(2n + 1)$ отклонение $s(x, t) = 0$. Подставляя

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$, получаем $x_n = \frac{\lambda}{4}(2n + 1)$. Расстояние между любыми двумя соседними точками волны, в которых отклонение обращается в ноль, равно

$$x_{n+1} - x_n = \frac{\lambda}{4}(2(n+1) + 1) - \frac{\lambda}{4}(2n + 1) = \frac{\lambda}{2}.$$

Волну, задаваемую уравнением

$$s(x, t) = 2A \cos \omega t \cos kx \quad (13.13)$$

называют стоячей волной, а ее неподвижные точки x_n называют узлами волны.

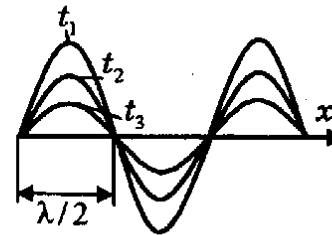


Рис. 13.7

Все точки волны, расположенные между двумя узлами, колеблются в одинаковых фазах; при переходе через узел фаза колебаний точек изменяется на π . Стоячая волна не переносит энергию.

На рис. 13.7 представлена стоячая волна для трех различных моментов времени t_1, t_2, t_3 .

Задача 13.8. Приемник радиосигналов, следящий за появлением спутника Земли из-за горизонта, расположен на берегу озера на высоте $H = 3$ м над поверхностью воды. По мере поднятия спутника над горизонтом наблюдаются периодические изменения интенсивности принимаемого сигнала. Определить частоту радиосигнала спутника, если максимумы интенсивности наблюдались при углах возвышения спутника над горизонтом

$$\alpha_1 = 3^\circ \text{ и } \alpha_2 = 6^\circ.$$

Решение.

Так как спутник находится на большом расстоянии от приемника, то принимаемый от него радиосигнал можно считать плоской волной (BC — волновая поверхность) (рис. 13.8). В приемник

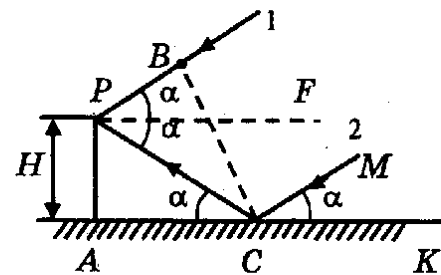


Рис. 13.8

P попадает луч 1, идущий непосредственно от спутника, и луч 2, отразившийся от поверхности озера, причем в точке C выполняется закон отражения. Поэтому $\angle ACP = \angle MCK = \alpha$ — угол возвышения спутника над горизонтом.

Проводим $PF \parallel AC$, тогда $\angle CPF = \angle ACP = \alpha$ и $\angle BPF = \angle MCK = \alpha$ как углы с соответственно параллельными сторонами. Итак $\angle BPC = 2\alpha$.

Разность хода лучей равна $CP - BP$. Из $\triangle ACP$ $CP = \frac{H}{\sin \alpha}$, а из $\triangle BCP$ $BP = CP \cos 2\alpha = \frac{H}{\sin \alpha} \cos 2\alpha$.

$$\begin{aligned} \text{Следовательно, } CP - BP &= \frac{H}{\sin \alpha} - \frac{H}{\sin \alpha} \cos 2\alpha = \\ &= \frac{H}{\sin \alpha} (1 - \cos 2\alpha) = \frac{H}{\sin \alpha} \cdot 2\sin^2 \alpha = 2H \sin \alpha. \end{aligned}$$

Поскольку угол α мал, $\sin \alpha = \alpha$, тогда $CP - BP = 2H\alpha$.

Максимум интенсивности принимаемого сигнала наблюдается, если разность хода равна целому числу волны, следовательно, для углов α_1 и α_2 получаем уравнения:

$$2H\alpha_1 = k\lambda, \quad 2H\alpha_2 = (k+1)\lambda, \quad \text{где } k - \text{целое число.}$$

После вычитания первого уравнения из второго получим:

$$(k+1)\lambda - k\lambda = 2H(\alpha_2 - \alpha_1) \Rightarrow \lambda = 2H(\alpha_2 - \alpha_1); \quad \text{частота}$$

$$\text{радиосигнала } \nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{2H(\alpha_2 - \alpha_1)}, \quad \text{где } c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с} -$$

скорость света, $\alpha_1 = 3^\circ = \pi/60$ рад, а $\alpha_2 = 6^\circ = \pi/30$ рад. После подстановки получим $\nu = 10^9$ Гц.

Задача 13.9. Два точечных когерентных источника света S_1 и S_2 расположены на расстоянии d друг от друга. На расстоянии $L \gg d$ от источников помещен экран. Найти расстояние между соседними интерференционными полосами вблизи середины экрана, если источники излучают свет с длиной волны λ (рис. 13.9).

Решение.

Пусть A — точка, в которой наблюдается интерференционный максимум, расположена на расстоянии h от середины экрана

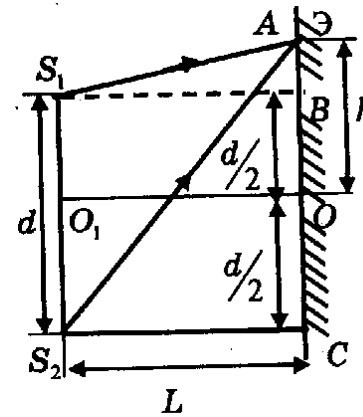


Рис. 13.9

на O . Разность хода световых волн, излучаемых источниками, равна $S_2A - S_1A$. Из прямоугольного $\triangle S_1AB$:

$$\begin{aligned} S_1A^2 &= S_1B^2 + AB^2 = \\ &= L^2 + (h - d/2)^2 = \\ &= L^2 \left(1 + \frac{(h - d/2)^2}{L^2} \right). \end{aligned}$$

$$S_1A = L \sqrt{1 + \left(\frac{h - d/2}{L} \right)^2}$$

По условию задачи $d \ll L$ и $h \ll L$, поэтому $\frac{(h - d/2)}{L} \ll 1$. Известно, что при $|x| \ll 1$ $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x$,

поэтому

$$S_1A = L \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{h - d/2}{L} \right)^2 \right) = L + \frac{1}{2} \frac{(h - d/2)^2}{L}$$

Из прямоугольного $\triangle S_2AC$:

$$S_2A^2 = S_2C^2 + AC^2 = L^2 + (h + d/2)^2 \quad \text{или}$$

$$S_2A^2 = L^2 \left(1 + \left(\frac{h + d/2}{L} \right)^2 \right) \Rightarrow S_2A = L \sqrt{1 + \left(\frac{h + d/2}{L} \right)^2}$$

Так как $\frac{(h + d/2)}{L} \ll 1$, то

$$S_2A = L \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{h + d/2}{L} \right)^2 \right) = L + \frac{1}{2} \frac{(h + d/2)^2}{L}$$

Следовательно, разность хода $S_2A - S_1A =$

$$= \frac{1}{2} \frac{(h + d/2)^2}{L} - \frac{1}{2} \frac{(h - d/2)^2}{L} = \frac{(h + d/2)^2 - (h - d/2)^2}{2L} = \frac{hd}{L}$$

С другой стороны, так как A — точка интерференционного максимума, то $S_2A - S_1A = k\lambda$, где $k = 0, 1, 2$.

Следовательно, $k\lambda = \frac{hd}{L}$. Отсюда получаем, что интерференционные максимумы располагаются на экране симметрично относительно линии O_1O на расстояниях

$$h = h_k = k \frac{\lambda}{d} L.$$

Максимум, соответствующий целому числу k , называется максимумом порядка k .

Максимум $(k + 1)$ порядка будет находиться на расстоянии

$h_{k+1} = \frac{(k + 1)\lambda L}{d}$ от середины экрана. Расстояние между максимумами:

$$\boxed{h_{k+1} - h_k = \frac{(k + 1)\lambda L}{d} - \frac{k\lambda L}{d} = \lambda \frac{L}{d}} \quad (13.14)$$

Из последней формулы следует, что расстояние между максимумами тем больше, чем больше отношение L/d .

Задача 13.10. Два плоских зеркала образуют между собой угол, близкий к 180° . На равных расстояниях l от зеркала расположен источник света S . Определить расстояние между соседними интерференционными полосами на экране, находящимся на расстоянии $L \gg l$ от линии пересечения зеркал. Длина световой волны — λ . Непрозрачный экран \mathcal{E}_1 препятствует прямому попаданию света на экран \mathcal{E} (рис. 13.10). Угол α задан.

Решение.

После отражение света от плоских зеркал образуются когерентные волны, которые на

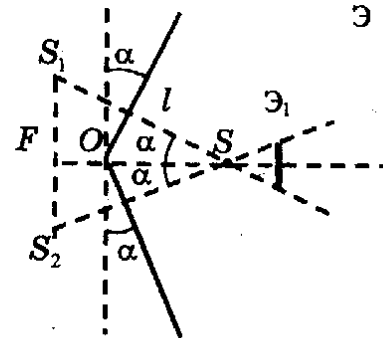


Рис. 13.10

на экране \mathcal{E} создают интерференционную картину. Можно считать, что источниками этих когерентных волн являются мнимые изображения S_1 и S_2 источника S в плоских зеркалах. В равнобедренном ΔS_1S_2S :

$$S_1S = S_2S = 2l \text{ и}$$

$$\angle S_1SO = \angle S_2SO = \alpha,$$

причем угол α мал, так как

угол между зеркалами близок к 180° . Расстояние между мнимыми источниками $d = S_1S_2 = 2S_1F = 2S_1S \sin \alpha =$

$= 2 \cdot 2l \sin \alpha = 4l\alpha$. Так как $L \gg l$, то можно считать, что расстояние от источников S_1 и S_2 равно L . Тогда, используя результаты задачи 13.9, найдем, что расстояние между интерференционными полосами равно $\lambda \frac{L}{d} = \frac{\lambda L}{4\alpha l}$.

Задача 13.11. Собирающая линза с фокусным расстоянием $F = 10$ см разрезана пополам вдоль главной оптической оси и половинки раздвинуты на расстояние $l = 0,5$ мм. Оценить число интерференционных полос на экране, расположенном за линзой на расстоянии $b = 60$ см, если перед линзой находится точечный источник монохроматического света с длиной волны $\lambda = 500$ нм, удаленный от нее на $a = 15$ см. Участок O_1O_2 закрыт непрозрачным экраном (рис. 13.11).

Решение.

После того как линзу разрезали, образовалось две линзы — L_1 и L_2 с оптическими центрами O_1 и O_2 и фокусами F_1 и F_2 . Так как радиусы кривизны поверхностей не изменились, то

фокусные расстояния образовавшихся линз равны фокусному расстоянию неразрезанной линзы F .

Свет от источника S разделяется на два когерентных пучка: через линзу L_1 проходит пучок, ограниченный лучами SO_1 и SD , а через линзу L_2 проходит световой пучок, ограниченный лучами SO_2 и SM . Все лучи верхнего пучка пересекаются в точке S_1 , являющейся изображением источника S в линзе L_1 .

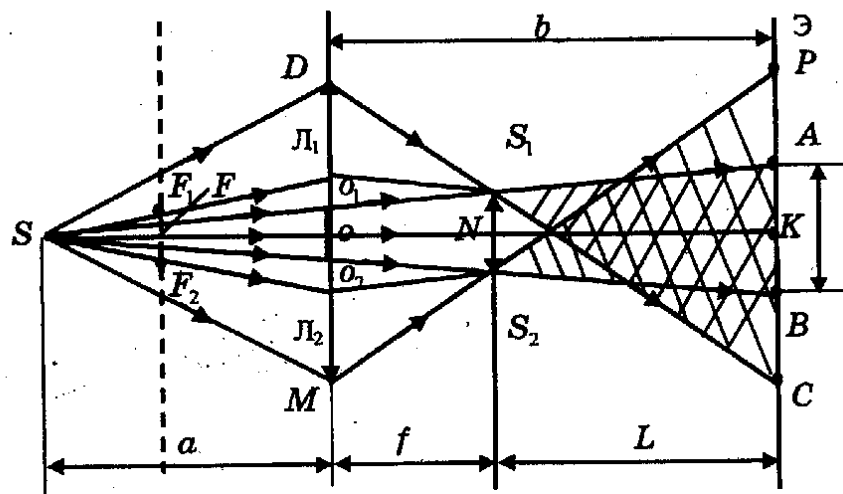


Рис. 13.11

Световой пучок, прошедший через линзу L_1 , падает на экран между точками A и C . Все лучи нижнего пучка пересекаются в точке S_2 , являющейся изображением источника S в линзе L_2 . На экран этот световой пучок попадает между точками B и P . Таким образом, на экране когерентные пучки перекрываются между точками A и B . На этой части экрана можно наблюдать интерференционную картину. Можно также считать, что интерферирующие пучки созданы источниками S_1 и S_2 .

Пусть f – расстояние от линз до изображений S_1 и S_2 . По формуле тонкой линзы $\frac{1}{F} = \frac{1}{a} + \frac{1}{f} \Rightarrow f = \frac{Fa}{a-F} = 30$ см.

Расстояние между изображениями S_1 и S_2 обозначим через d , тогда из подобия ΔSO_1O_2 и ΔSS_1S_2 получим $\frac{O_1O_2}{S_1S_2} = \frac{SO}{SN} \Rightarrow \frac{l}{d} = \frac{a}{a+f} \Rightarrow d = \frac{l(a+f)}{a} = l\left(1 + \frac{f}{a}\right) = 0,15$ см.

Расстояние от S_1 и S_2 до экрана \mathcal{E} : $L = b - f = 30$ см. Следовательно, используя результаты задачи 13.9, можно определить расстояние между интерференционными максимумами по формуле:

$$\lambda \frac{L}{d} = \frac{30\lambda}{0,15} = 200\lambda = 10^{-4} \text{ м} = 10^{-2} \text{ см.}$$

Размер AB интерференционной картины на экране можно определить из подобия ΔSO_1O_2 и ΔSAB :

$$\frac{O_1O_2}{AB} = \frac{SO}{SK} \Rightarrow AB = \frac{O_1O_2 \cdot SK}{SO} = \frac{l(a+b)}{a} = l\left(1 + \frac{b}{a}\right) = 0,25 \text{ см.}$$

Число интерференционных полос на экране равно размеру интерференционной картины AB , деленной на расстояние между максимумами, т.е. $N = \frac{0,25 \text{ см}}{10^{-2} \text{ см}} = 25$.

Задача 13.12. Точечный источник света S расположен в фокусе линзы, за которой находится бипризма с углом $\alpha = 0,01$ рад (рис.13.12). На каком расстоянии L от бипризмы можно наблюдать наибольшее число интерференционных полос? Сколько полос в этом случае можно увидеть на экране? Чему равна ширина полос? Коэффициент преломления стекла бипризмы $n = 1,5$, длина волны света $\lambda = 0,5$ мкм, диаметр линзы $D = 6$ см.

Решение.

Поскольку источник света находится в фокусе линзы, на бипризму падает параллельный пучок света. Свойства бипризмы

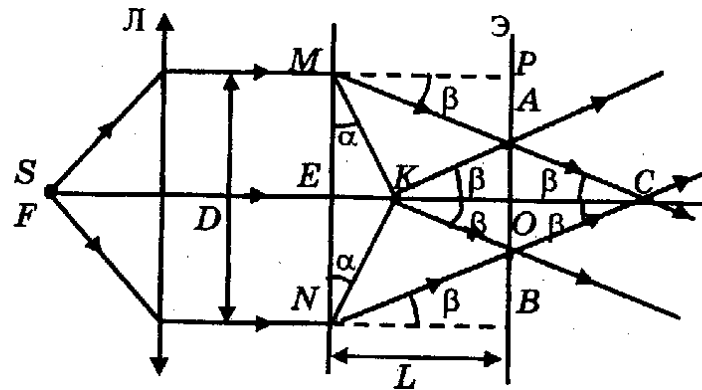


Рис. 13.12

с малым углом α были рассмотрены в задаче 12.11. Было показано, что параллельный пучок света разбивается бипризмой на два параллельных пучка, которые отклонены от первоначального направления на угол $\beta = (n - 1)\alpha$. Наибольшее число интерференционных полос можно наблюдать в том месте, где самая большая площадь пересечения интерферирующих пучков (как видно из построения, это будет между точками A и B). На экране Э, проходящем через точки A и B, можно наблюдать интерференционную картину.

Из $\triangle SEM$: $SE = \frac{ME}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{D}{2\operatorname{tg}\beta}$. Отметим, что

$SE = KE + CK = CK$, так как $KE \ll CK$.

Четырехугольник ACBK - ромб, поэтому $CO = KO \Rightarrow$

$\Rightarrow CK = 2KO = SE \Rightarrow KO = \frac{CK}{2} = \frac{SE}{2} = \frac{D}{4\operatorname{tg}\beta} = L$.

Учитывая, что угол β мал и $\operatorname{tg}\beta = \beta$, находим

$L = \frac{D}{4\beta} = \frac{D}{4\alpha(n-1)} = 300\text{см} = 3\text{м}$. Пренебрегая KE , получим,

что $AO = \frac{1}{2}ME \Rightarrow AB = \frac{1}{2}MN = \frac{D}{2} = 3\text{см}$. Это и есть размер интерференционной картины. При этом максимальная разность хода лучей двух пучков равна $MA - KA$. Выразим эту разность.

Из $\triangle APM$: $MA = \frac{L}{\cos\beta}$. Из $\triangle KEM$: $KE = \frac{D}{2}\operatorname{tg}\alpha$.

$KO = EO - KE = L - \frac{D}{2}\operatorname{tg}\alpha$.

Из $\triangle AOK$: $KA = \frac{KO}{\cos\beta} = L - \frac{D/2}{\cos\beta}\operatorname{tg}\alpha$.

Итак, $MA - KA = \frac{L}{\cos\beta} - \frac{L - (D/2)\operatorname{tg}\alpha}{\cos\beta} = \frac{(D/2)\operatorname{tg}\alpha}{\cos\beta} = \frac{D\operatorname{tg}\alpha}{2\cos\beta} = \frac{D\alpha}{2} = 0,03\text{см}$.

(При малых углах α и β $\operatorname{tg}\alpha = \alpha$, $\cos\beta = 1$).

Разность хода, соответствующая двум соседним максимумам, равна длине волны λ . Таким образом, число интерференционных полос, образующихся на экране:

$N = \frac{MA - KA}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^{-4}\text{м}}{0,5 \cdot 10^{-6}\text{м}} = 6 \cdot 10^2$.

Так как вся интерференционная картина занимает 3 см, то ширина одной полосы равна

$\frac{3\text{см}}{6 \cdot 10^2} = 0,5 \cdot 10^{-2}\text{см} = 0,5 \cdot 10^{-4}\text{м} = 50\text{мкм}$.

Задача 13.13. От точечного монохроматического источника A отодвигают точечный монохроматический источник B (источники когерентны и синфазны) до тех пор, пока в точке O, где наблюдается интерференция, не наступает потемнение. При этом расстояние между A и B $d = 2\text{мм}$. Расстояние между источником и экраном $L = 9\text{м}$. На сколько нужно передвинуть экран, чтобы в точке O, возникло потемнение (рис. 13.13)?

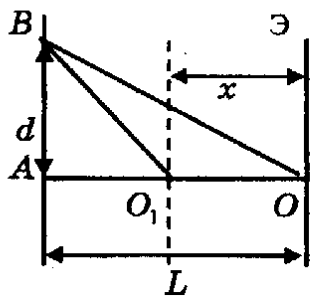


Рис. 13.13

Решение.
 При удалении источника B первое потемнение в точке O возникает при условии, что разность хода волн от источников B и A равна половине длины волны, т.е. $BO - AO = \lambda/2$ или

$$\sqrt{L^2 + d^2} - L = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{L^2 \left(1 + \frac{d^2}{L^2}\right)} - L = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L \left(\sqrt{1 + \left(\frac{d}{L}\right)^2} - 1 \right) = \frac{\lambda}{2} \quad (1).$$

В задаче 13.9 отмечалось, что при $|x| \ll 1$ $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x$. В

нашей задаче $\frac{d}{L} \ll 1$, поэтому $\sqrt{1 + \left(\frac{d}{L}\right)^2} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{d}{L}\right)^2$ и, следовательно, уравнение (1) приводится к виду:

$$\frac{d^2}{2L} = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow d^2 = L\lambda.$$

Если экран приблизить к источникам на расстояние x , то минимум в точке O_1 будет соответствовать разности хода $\frac{3}{2}\lambda$, т.е. $BO_1 - AO_1 = \frac{3}{2}\lambda$ или $\sqrt{(L-x)^2 + d^2} - (L-x) = \frac{3}{2}\lambda$.

$$\text{Следовательно, } (L-x) \left(\sqrt{1 + \left(\frac{d}{L-x}\right)^2} - 1 \right) = \frac{3}{2}\lambda.$$

Учитывая, что и в этом случае $\frac{d}{L-x} \ll 1$, приходим к уравнению

$$\frac{d^2}{2(L-x)} = \frac{3\lambda}{2} \Rightarrow d^2 = 3(L-x)\lambda.$$

Приравнявая выражения для d^2 , получаем: $L\lambda = 3(L-x)\lambda \Rightarrow x = \frac{2}{3}L = 6 \text{ м.}$

Задача 3.14. Период дифракционной решетки $d = 4 \text{ мкм.}$ Дифракционная картина наблюдается с помощью линзы L с

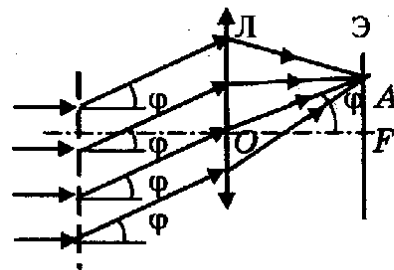


Рис. 13.14

фокусным расстоянием $F = 40 \text{ см.}$ Определить длину λ световой волны падающего нормально на решетку света, если первый максимум получается на расстоянии $b = 5 \text{ см}$ от центрального (рис. 13.14).

Решение.

Пусть направление на первый максимум характеризуется углом φ , тогда по формуле дифракционной решетки

$$d \sin \varphi = k\lambda = \lambda, \text{ так как } k = 1. \text{ Из } \triangle OAF: \operatorname{tg} \varphi = \frac{AF}{OF} = \frac{b}{F}.$$

При малых φ $\operatorname{tg} \varphi = \sin \varphi = \frac{b}{F}$, поэтому $\lambda = d \frac{b}{F} = 0,5 \text{ мкм.}$

Задача 13.15. Дифракционная решетка содержит 400 штрихов на 1 мм. Нормально на решетку падает монохроматический красный свет с длиной волны $\lambda = 650 \text{ нм.}$ Под каким углом виден первый максимум? Сколько всего максимумов дает эта решетка? Каков максимальный угол отклонения лучей, соответствующих последнему дифракционному максимуму?

Решение.

На 1 м решетки приходится $N = 400 \cdot 10^3 = 4 \cdot 10^5$ штрихов. Период дифракционной решетки $d = \frac{1}{N} = 2,5 \cdot 10^{-6}$ м. Из формулы дифракционной решетки $d \sin \varphi = k \lambda$ при $k = 1$ находим угол φ_1 , под которым виден первый максимум: $\sin \varphi_1 = \frac{\lambda}{d} = 0,26 \Rightarrow \varphi_1 = 15^\circ$.

В разделе 13.2 было показано, что при помощи дифракционной решетки можно наблюдать максимумы порядка $k \leq \frac{d}{\lambda} = 3,8$. Учитывая, что k – целое число, получаем $k_{\max} = 3$. Итак, данная дифракционная решетка будет давать центральный максимум, соответствующий $k = 0$, и по два симметрично расположенных максимума первого, второго и третьего порядков. Всего получаем 7 максимумов.

Максимальный угол отклонения лучей соответствует максимуму третьего порядка: $d \sin \varphi_{\max} = 3 \lambda \Rightarrow \Rightarrow \sin \varphi_{\max} = 3 \frac{\lambda}{d} = 0,78 \Rightarrow \varphi_{\max} = 51,3^\circ$.

Задача 13.16. Найти скорость фотоэлектронов, вылетающих из цинка при освещении его ультрафиолетовым светом с длиной волны $\lambda = 300$ нм, если работа выхода электрона из цинка $A_{\text{в}} = 6,4 \cdot 10^{-19}$ Дж.

Решение.

Применяем уравнение Эйнштейна для фотоэффекта: $h\nu = \frac{m_e v^2}{2} + A_{\text{в}}$. Учитывая, что частота $\nu = \frac{c}{\lambda}$, находим ско-

рость фотоэлектронов: $v = \sqrt{\frac{2h \frac{c}{\lambda} - A_{\text{в}}}{m_e}}$, где m_e – масса электрона. После подстановки находим $v = 8,7 \cdot 10^5$ м/с.

Задача 13.17. Красная граница фотоэффекта у лития $\lambda_{\text{кр}} = 5,2 \cdot 10^{-7}$ м. Какую задерживающую разность потенциалов нужно приложить к фотоэлементу, чтобы задержать электроны, излучаемые литием под действием ультрафиолетовых лучей с длиной волны $\lambda = 2 \cdot 10^{-7}$ м?

Решение.

По заданной красной границе фотоэффекта легко определить работу выхода лития $h\nu_{\text{кр}} = A_{\text{в}} \Rightarrow h \frac{c}{\lambda_{\text{кр}}} = A_{\text{в}}$ (1).

В случае, когда литий освещается ультрафиолетовым светом, кванты которого обладают большей энергией, вырвавшиеся фотоэлектроны обладают скоростью v , а значит, и кинетической энергией, равной $\frac{m_e v^2}{2}$, где m_e – масса электрона.

Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта запишется в виде:

$$h \frac{c}{\lambda} = A_{\text{в}} + \frac{m_e v^2}{2} \quad (2)$$

Для того чтобы задержать электроны, прикладывают задерживающую разность потенциалов u_3 , причём

$$\frac{m_e v^2}{2} = |e| u_3 \quad (3)$$

где $|e|$ – модуль заряда электрона.

После подстановки значений работы выхода из (1) и максимальной кинетической энергии из (3) в уравнение (2) получим:

$$h \frac{c}{\lambda} = h \frac{c}{\lambda_{\text{кр}}} + |e| u_3 \Rightarrow |u_3| = \frac{hc(\lambda_{\text{кр}} - \lambda)}{|e| \lambda \lambda_{\text{кр}}} = 3,8 \text{ В.}$$

Задача 13.18. Излучение аргонового лазера с длиной волны $\lambda = 500$ нм сфокусировано на плоском фотокатоде в пятно диаметром $d = 0,1$ мм. Работа выхода фотокатода $A_{\text{в}} = 2$ эВ. На плоский анод, расположенный на расстоянии $L = 30$ мм от катода, подано ускоряющее напряжение $u = 4$ кВ. Найти диаметр

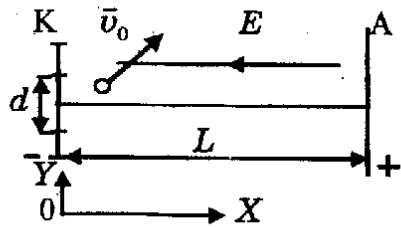


Рис. 13.15

пятна фотоэлектронов на аноде. Анод А расположен параллельно поверхности катода К.

Решение.

Используя уравнение Эйнштейна для фотоэффекта, можно определить v_0 – скорость фотоэлектронов, вылетевших из катода:

$$h \frac{c}{\lambda} = A_{\text{в}} + \frac{m_e v_0^2}{2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2 \left(h \frac{c}{\lambda} - A_{\text{в}} \right)}{m_e}}, \text{ причем вектор}$$

скорости электрона \vec{v}_0 направлен произвольно в пространстве (см. рис. 13.15).

Между анодом и катодом существует однородное электрическое поле с напряженностью $E = \frac{u}{L}$, направленное от анода к катоду. Это поле действует на электрон с силой, равной по модулю $|e|E$ и направленной в сторону, противоположную вектору \vec{E} ($|e|$ – модуль заряда электрона). Введем оси координат X и Y , направленные как показано на рис.13.15. В направлении оси X электрон приобретает постоянное ускорение $a_x = \frac{|e|E}{m_e}$ (m_e – масса электрона) и совершает равноускоренное движение.

В направлении оси Y на электрон не действуют силы, его ускорение в этом направлении равно нулю, а движение является прямолинейным равномерным.

Диаметр пятна на аноде определяется электронами, вылетевшими из крайних точек катода. Кроме того, диаметр пятна тем больше, чем больше смещение электронов в направлении оси Y . В свою очередь, это смещение максимально, когда проекция скорости электрона на ось Y максимальна, и когда время

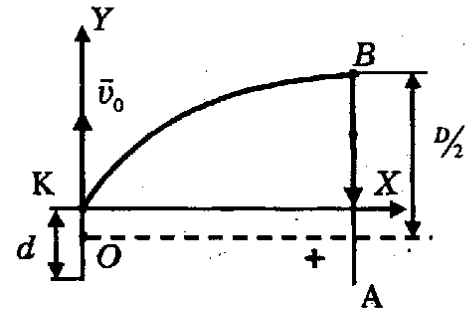


Рис. 13.16

пролета электрона максимально. Это соответствует тому, что скорость электронов направлена вдоль оси Y (рис.13.16).

Поместив начало координат в центре катода, запишем движения электрона по осям координат:

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2} = \frac{|e|E}{2m_e} t^2,$$

$$y(t) = y_0 + v_0 t = \frac{d}{2} + v_0 t.$$

При попадании электрона на анод

$$x(t) = L = \frac{a_x t_n^2}{2} = \frac{|e|E}{2m_e} t_n^2. \text{ Отсюда следует, что } t_n = \sqrt{\frac{2m_e L}{|e|E}},$$

где t_n – время пролета. В точке B , в которой электрон попадает на анод $y_B = \frac{d}{2} + v_0 t_n$. Диаметр пятна на аноде $D = 2y_B =$

$$= d + 2v_0 t_n = d + 2 \sqrt{\frac{2 \left(h \frac{c}{\lambda} - A_{\text{в}} \right)}{m_e}} \sqrt{\frac{2m_e L}{|e|E}} = d + 4L \sqrt{\frac{h \frac{c}{\lambda} - A_{\text{в}}}{\lambda u}}$$

Задача 13.19. Мощность точечного источника монохроматического света $P_0 = 10$ Вт. Длина волны $\lambda = 500$ нм. На каком максимальном расстоянии этот источник будет замечен человеком, если глаз реагирует на световой поток $n = 60$ фотонов в секунду? Диаметр зрачка $d = 0,5$ см.

Решение.

За промежуток времени Δt точечный источник излучает энергию $P_0 \Delta t$, причем в любой момент времени эта энергия

распределяется равномерно по поверхности сферы радиусом R . На единицу поверхности приходится энергия излучения, равная $P_0 \Delta t / 4\pi R^2$, и, следовательно, в зрачок, находящийся на расстоянии R , попадает энергия $\frac{P_0 \Delta t}{4\pi R^2} S$, где $S = \frac{\pi d^2}{4}$. Пусть за время Δt в зрачок попадает N фотонов, тогда световую энергию можно выразить как $Nh\nu = Nh \frac{c}{\lambda}$. Приравнивая значения энергий, получаем:

$$\frac{P_0 \Delta t}{4\pi R^2} \left(\frac{\pi d^2}{4} \right) = Nh \frac{c}{\lambda} \Rightarrow \frac{P_0}{16R^2} d^2 = \frac{N}{\Delta t} h \frac{c}{\lambda}$$

Но $\frac{N}{\Delta t} = n$, поэтому $\frac{P_0}{16R^2} d^2 = nh \frac{c}{\lambda} \Rightarrow R = \frac{d}{4} \sqrt{\frac{P_0 \lambda}{nhc}} = 10^6 \text{ м} = 10^3 \text{ км}$.

Задача 13.20. Свет от солнца падает на плоское зеркало площадью $S = 1 \text{ м}^2$ под углом $\alpha = 60^\circ$. Найти силу светового давления, считая, что зеркало полностью отражает весь падающий на него свет. Известно, что средняя мощность солнечного излучения, приходящаяся на 1 м^2 перпендикулярной к излучению земной поверхности, $P = 1,4 \cdot 10^3 \text{ Вт/м}^2$.

Решение.

Падающие на зеркало фотоны упруго отражаются от него, причем их скорость остается равной скорости света c . После отражения импульс фотонов направлен вдоль отраженного луча. Изменение импульса фотонов обусловлено импульсом силы, действующей со стороны зеркала на фотоны. По третьему закону Ньютона точно такая же по модулю сила будет действовать на зеркало со стороны фотонов.

За промежуток времени Δt на площадку S , расположенную перпендикулярно направлению распространения света, падает световая энергия, равная $P \Delta t S$. Если же площадка расположена (как в нашем случае) под углом, то энергия, которая на нее падает $W = P \Delta t S \cos \alpha$ (рис. 13.17).

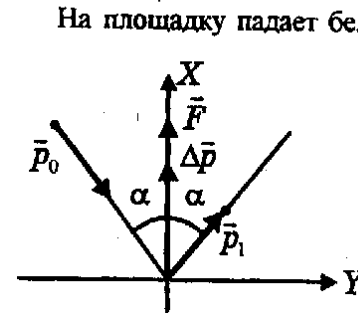


Рис. 13.17

На площадку падает белый свет, содержащий фотоны разных частот, поэтому падающая энергия $W = \sum N_i (h\nu_i)$, где N_i – количество фотонов частоты ν_i , прошедших через площадку за время Δt .

Рассмотрим фотон частоты ν_i , упруго отражающийся от площадки. Модули его импульса до и после отражения

равны, т.е. $p_0 = p_1 = \frac{h\nu_i}{c}$. Введем оси X и Y , направленные как показано на рис. 13.17. Проекции начального и конечного импульсов выражаются формулами:

$$p_{0x} = p_0 \cos \alpha; \quad p_{0y} = p_0 \sin \alpha;$$

$$p_{1x} = p_0 \cos \alpha; \quad p_{1y} = p_0 \sin \alpha.$$

Отсюда следует, что изменение импульсов по осям X и Y равны: $\Delta p_x = p_x - p_{0x} = 2p_0 \cos \alpha$, $\Delta p_y = 0$. Изменение импульса фотона $\Delta p = \sqrt{\Delta p_x^2 - \Delta p_y^2} = 2p_0 \cos \alpha$.

Изменение импульса N_i фотонов равно $(2p_0 \cos \alpha)N_i$, а изменение импульса всех фотонов – $\sum N_i 2p_0 \cos \alpha$. Из основного уравнения динамики изменение импульса равно импульсу действующей силы:

$$\sum (N_i 2p_0 \cos \alpha) = F \Delta t \Rightarrow \sum \left(N_i 2 \frac{h\nu_i}{c} \cos \alpha \right) = F \Delta t \Rightarrow \Rightarrow \frac{2}{c} \cos \alpha \sum (N_i h\nu_i) = F \Delta t.$$

Как уже отмечалось, сумма $\sum N_i h\nu_i = W$ – энергия излучения, равная, в свою очередь, $P_i \Delta t S \cos \alpha$. После подстановки в последнее уравнение получаем:

$$\frac{2}{c} \cos \alpha P \Delta t S \cos \alpha = F \Delta t \Rightarrow F = 2 \frac{P}{c} S \cos^2 \alpha = 2,3 \cdot 10^{-6} \text{ Н.}$$

Задача 13.21. На оси длинной тонкостенной трубки радиусом $r = 1 \text{ см}$ с зеркально отражающими внутренними стенками расположен точечный источник S , мощность которого $P = 1 \text{ Вт}$, дающий излучение с длиной волны $\lambda = 0,5 \text{ мкм}$. У торца трубки на расстоянии $L = 1 \text{ м}$ от источника расположен фотоэлемент ФЭ. Найти число фотонов, попадающих на фотоэлемент в одну секунду после двукратного отражения на стенках трубки (рис. 13.18).

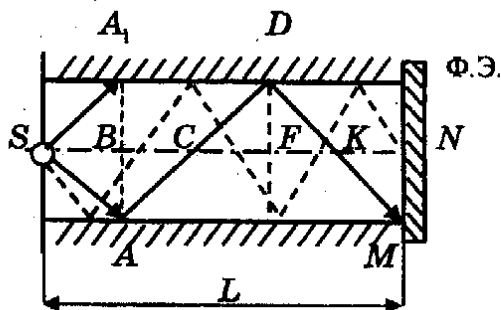


Рис. 13.18

Если этот угол опирается на сферической поверхности на площадку S , то $\alpha = \frac{S}{R^2}$ (рис. 13.19).

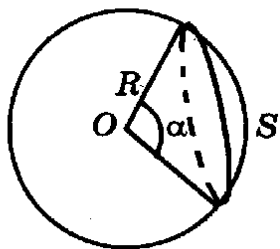


Рис. 13.19

На рис. 13.18 приведен ход луча SA , который испытывает два отражения на стенках трубки. Если луч выходит из точки S под большим углом к оси трубки, то он испытывает более двух отражений. Ход такого луча изображен пунктирной линией на рис. 13.18.

AB и DF – перпендикуляры, восстановленные в точках падения луча. Так как $\angle SAB = \angle BAC$, то $\Delta SAB = \Delta BAC$. Аналогично дока-

зывается, что $\Delta CDF = \Delta KDF$. $\angle BCA = \angle DCF$ как вертикальные, поэтому $\angle BAC = \angle CDF$. Аналогично доказываем, что $\Delta KDF = \Delta KMN$. В итоге получаем, что

$\Delta SAB = \Delta BAC = \Delta CDF = \Delta KDF = \Delta KMN$. Следовательно, $SB = BC = CF = FK = KN = \frac{1}{5} L$.

Из точки S выходит также луч, распространяющийся симметрично относительно оси трубки, – это луч SA_1 . Телесный угол α_1 , соответствующий лучам SA и SA_1 , имеет вершину в точке S . Так как $r \ll L$, то радиус сферы с центром в точке S

$SA = SA_1 = SB = \frac{1}{5} L$, а площадь сферической поверхности, на которую опирается угол α_1 , равен площади сечения трубки –

$$\pi r^2. \text{ Таким образом, } \alpha_1 = \frac{\pi r^2}{\left(\frac{L}{5}\right)^2} = \frac{25\pi r^2}{L^2}.$$

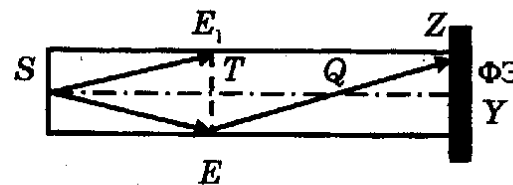


Рис. 13.20

Если уменьшить угол выхода луча с осью трубки, то при некотором значении этого угла количество отражений от стенок станет равным одному.

Ход такого луча SE представлен на рис. 13.20.

Используя закон отражения, доказываем, что

$$\Delta STE = \Delta TEQ = \Delta QZY \Rightarrow ST = TQ = QY = \frac{1}{3} L.$$

Телесный угол, соответствующий лучам SE и SE_1 ,

$$\alpha_2 = \frac{\pi r^2}{(L/3)^2} = \frac{9\pi r^2}{L^2}.$$

Итак, все лучи, испытывающие два отражения, находятся в пределах $\alpha_2 \leq \alpha \leq \alpha_1$. Точечный источник S излучает равномерно по всем направлениям, поэтому мощность, приходящаяся на единичный телесный угол, равна $\frac{P}{4\pi}$. (Телесный угол, описывающий всю сферу, равен 4π). Следовательно, мощность излучения в телесном угле $(\alpha_1 - \alpha_2)$ равна

$$\frac{P}{4\pi}(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{P}{4\pi} \left(\frac{25\pi r^2}{L^2} - \frac{9\pi r^2}{L^2} \right) = 4P \frac{r^2}{L^2}$$

С другой стороны, мощность излучения можно выразить, умножив энергию фотона на число фотонов в 1 секунду, т.е.

$h\nu N = h \frac{c}{\lambda} N$. Получаем уравнение:

$$4P \left(\frac{r}{L} \right)^2 = h \frac{c}{\lambda} N \Rightarrow N = \frac{4P\lambda}{hc} \left(\frac{r}{L} \right)^2 = 10^{17}$$

Глава 14. Элементы теории относительности. Атомная и ядерная физика

14.1. Постулаты теории относительности

Основу теории относительности составляют два постулата: принцип относительности Эйнштейна и постулат о скорости света в вакууме.

Принцип относительности формулируется так: любые физические явления при одинаковых условиях протекают одинаково во всех инерциальных системах отсчета, т.е. законы физики имеют одну и ту же форму во всех инерциальных системах отсчета.

Постулат о скорости света в вакууме утверждает, что во всех инерциальных системах отсчета скорость света в вакууме является предельной скоростью и не зависит от скорости движения источника и наблюдателя. Скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Постулаты теории относительности отражают реальные закономерности, существующие в окружающем мире. Из них вытекает ряд важных следствий.

14.2. Основные формулы теории относительности

1. Относительность расстояний.

Пусть l_0 — длина стержня в некоторой инерциальной системе отсчета, относительно которой стержень покоится, l — длина этого же стержня, но в системе отсчета, относительно которой стержень движется со скоростью v , тогда

$$l = l_0 \sqrt{1 - (v/c)^2} \quad (14.1)$$

из которой следует, что $l < l_0$. При $v \ll c$ отношение $(v/c)^2 \rightarrow 0$ и l практически равно l_0 .

2. Относительность промежутков времени.

Промежуток времени τ_0 (собственное время) между двумя событиями, происходящими в некоторой инерциальной системе отсчета (неподвижная система), и промежуток времени τ между

этими же событиями, но измеренный в системе отсчета, движущейся со скоростью v относительно "неподвижной системы", связаны соотношением

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (14.2)$$

которое показывает, что $\tau > \tau_0$ (эффект замедления времени).

При $v \ll c$ $(v/c)^2 \rightarrow 0$ и τ практически равно τ_0 .

3. Релятивистский закон сложения скоростей.

Если $\vec{v}_{отн}$ – скорость тела относительно некоторой подвижной системы отсчета, движущейся относительно неподвижной со скоростью \vec{u} , то скорость \vec{v} этого тела относительно неподвижной системы отсчета определялась классическим законом сложения скоростей: $\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}_{отн}$. В частном случае, когда все скорости направлены вдоль одной прямой, для их проекций получалось соотношение: $v = u + v_{отн}$. Согласно теории относительности указанные выше скорости связаны более общим соотношением

$$v = \frac{u + v_{отн}}{1 + \frac{uv_{отн}}{c^2}} \quad (14.3)$$

которое называют релятивистским законом сложения скоростей. При $u \ll c$ и $v_{отн} \ll c$ отношение $\frac{uv_{отн}}{c^2} \rightarrow 0$ и в пределе получается классический закон сложения скоростей.

4. Зависимость массы от скорости движения.

Масса тела зависит от скорости его движения и выражается формулой

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (14.4)$$

где v – скорость движения тела, m_0 – масса покоя тела. При $v = 0$ $m = m_0$, при $v \ll c$ масса тела практически равна массе покоя. С увеличением скорости движения тела масса его возрастает.

5. Релятивистский импульс тела.

Импульс движущегося со скоростью \vec{v} тела выражается формулой

$$\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (14.5)$$

где m_0 – масса покоя. При $v \ll c$ импульс тела вычисляется по формуле классической механики: $\vec{p} = m_0\vec{v}$.

6. Связь между массой и энергией.

Связь между массой и энергией выражается формулой Эйнштейна

$$W = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (14.6)$$

При $v = 0$ $W = W_0 = m_0c^2$, при этом W_0 называется энергией покоя.

Например, энергия покоя электрона

$$W_0 = m_e c^2 = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг} \cdot (3 \cdot 10^8 \text{ м/с})^2 = 819 \cdot 10^{-16} \text{ Дж}$$

Как правило, энергию элементарных частиц выражают в электронвольтах, причем $1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$. Поэтому энергия покоя электрона:

$$W_0 = 819 \cdot 10^{-16} \cdot \left(\frac{1}{1,6 \cdot 10^{-19}} \right) \text{ эВ} = 511 \cdot 10^3 \text{ эВ} = 511 \text{ кэВ} = 0,511 \text{ МэВ}$$

Из формулы (14.6) следует, что изменение энергии тела ΔW связано с изменением массы на Δm , причем $\Delta m = \Delta W / c^2$.

7. Кинетическая энергия движущегося тела.

Кинетическая энергия движущегося тела равна разности между его энергией и энергией покоя, т.е.

$$W_k = W - W_0 = mc^2 - m_0c^2 \quad (14.7)$$

14.3. Строение атома. Постулаты Бора

Атомы имеют размеры порядка 10^{-10} м. Атом любого химического элемента состоит из положительно заряженного ядра и электронов. Ядро атома имеет размеры порядка $10^{-14} \div 10^{-15}$ м и в нем сосредоточена почти вся масса атома. Положительный заряд атомного ядра равен порядковому номеру элемента Z в периодической таблице Менделеева, умноженному на модуль заряда электрона $|e|$. Число электронов в атоме равно порядковому номеру элемента. Поэтому атом в целом электронейтрален.

Атомные системы подчиняются законам квантовой механики. Следствием этих законов являются постулаты Бора, правильно описывающие свойства атома водорода.

Первый постулат Бора: атомная система может находиться только в особых стационарных (квантовых) состояниях, каждому из которых соответствует определенная энергия W_n , где n – натуральное число; в стационарном состоянии атом не излучает.

Второй постулат Бора: излучение света происходит при переходе атома из стационарного состояния с большей энергией W_k в стационарное состояние с меньшей энергией W_n (n и k – натуральные числа, $W_k > W_n$), причем энергия излученного фотона равна разности энергий стационарных состояний

$$\boxed{h\nu_{k,n} = W_k - W_n}, \quad (14.8)$$

где $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка, а $\nu_{k,n}$ – частота излученного фотона.

Постулаты Бора дополняются правилом квантования величины $m_e v r$ (момент импульса), где m_e – масса электрона, v – его скорость на орбите радиусом r . Согласно этому правилу момент импульса электрона может принимать только дискретные значения, определяемые формулой:

$$\boxed{m_e v r = n \frac{h}{2\pi}} \quad (14.9)$$

где n – натуральное число.

14.4. Энергия стационарных состояний атома водорода

Полная энергия атома водорода равна сумме кинетической энергии электрона $W_k = \frac{m_e v^2}{2}$ и потенциальной энергии электростатического взаимодействия между электроном и протоном ядра W_p , причем

$$W_p = k \frac{e|e|}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{|e|^2}{r} \right) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r},$$

где $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная. Таким образом, энергия атома водорода

$$W = \frac{m_e v^2}{2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (14.10)$$

Движение электрона по круговой орбите происходит под действием кулоновской силы притяжения

$$F_k = \frac{|e| \cdot |e|}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

которая сообщает электрону центростремительное ускорение $a_n = v^2/r$. По второму закону Ньютона $F_k = m_e a_n \Rightarrow \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = m_e \frac{v^2}{r}$. Из последней формулы определяем

$$m_e v^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (14.11)$$

и после подстановки в формулу (14.10) находим:

$$W = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{2} W_p. \quad (14.12)$$

Выразим из формулы (14.9) $v = n \frac{h}{2\pi m_e r}$ и подставим в

формулу (14.11), тогда получим: $m_e \left(n \frac{h}{2\pi m_e r} \right)^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$. Из

последнего равенства находим радиусы орбит электрона в атоме водорода:

$$r = r_n = \frac{n^2 h^2 \epsilon_0}{\pi m_e e^2}, \quad n \in N. \quad (14.13)$$

Как видно, электрон в атоме водорода может двигаться только по вполне определенным орбитам, радиус которых рассчитывается по формуле (14.13). После подстановки r_n в формулу (14.12) находим значения энергий стационарных состояний атома водорода:

$$W_n = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} = -\frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2 n^2}. \quad (14.14)$$

$n = 1$ соответствует основному энергетическому состоянию атома водорода, в котором он может находиться сколь угодно

долго: $W_1 = -\frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} = -2,168 \cdot 10^{-18}$ Дж = -13,6 эВ.

Для того, чтобы ионизировать атом водорода, ему необходимо сообщить энергию

$$W_{\text{ион}} = -W_1 = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} = 13,6 \text{ эВ}. \quad (14.15)$$

При переходе атома из стационарного состояния с энергией W_k в состояние с энергией W_n ($k, n \in N, k > n, W_k > W_n$) атом излучает квант частоты

$$\nu_{k,n} = \frac{W_k - W_n}{h} = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^3} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right).$$

Умножив обе части последнего равенства на h , получим, что

$$h\nu_{k,n} = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right). \quad \text{Учитывая, что } \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} = W_{\text{ион}},$$

получаем:

$$h\nu_{k,n} = W_{\text{ион}} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right) \quad (14.16)$$

14.5. Строение атомного ядра

Ядро атома имеет сложную структуру. В его состав входят положительно заряженные протоны и частицы без заряда – нейтроны. Протоны и нейтроны называют нуклонами.

Протон и нейтрон имеют примерно равную массу. Тщательно выполненные эксперименты показали, что масса протона $m_p = 1,67252 \cdot 10^{-27}$ кг, а масса нейтрона

$$m_n = 1,67495 \cdot 10^{-27} \text{ кг}.$$

В ядерной физике массу выражают в атомных единицах массы (а.е.м). Атомная единица массы равна 1/12 массы атома углерода: 1 а.е.м = $1,6605655 \cdot 10^{-27}$ кг. Выраженные в а.е.м

массы протона и нейтрона составляют: $m_p = 1,007825$ а.е.м и

$$m_n = 1,008665 \text{ а.е.м}.$$

Количество протонов в ядре численно равно порядковому номеру Z ядра в периодической таблице Менделеева.

Количество нуклонов в ядре (сумма протонов и нейтронов ядра) называется массовым числом A ядра.

Количество нейтронов в ядре $N = A - Z$.

Ядра с одним и тем же числом протонов, но различным числом нейтронов, называются изотопами. Их химические свойства тождественны.

Для обозначения ядер применяется символ ${}^A_Z X$, где X – химический символ элемента, A – массовое число, Z – порядковый номер в периодической таблице.

Протоны и нейтроны удерживаются внутри ядра особыми силами – ядерными. Ядерные силы во много раз превосходят другие известные силы природы. По этой причине

взаимодействие посредством ядерных сил называют **сильным взаимодействием**. Ядерные силы проявляются на расстояниях, сравнимых с размером ядра, т.е. на расстояниях порядка $10^{-14} \div 10^{-15}$ м.

14.6. Радиоактивность. Закон радиоактивного распада. Энергия связи ядра

Ядра некоторых химических элементов могут самопроизвольно превращаться в ядра других химических элементов. Это явление называется радиоактивностью. Оно сопровождается радиоактивным излучением, представляющим собой потоки γ -, β - и α -излучений:

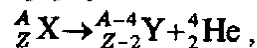
γ -излучение представляет собой коротковолновое излучение (длина волны от 10^{-10} м до 10^{-13} м);

β -излучение – это поток электронов, движущихся со скоростями, близкими к скорости света;

α -излучение есть поток α -частиц, т.е. ядер атома гелия.

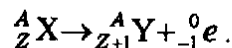
При радиоактивном распаде выполняется **правило смещения**.

При α -распаде ядро теряет положительный заряд $2|e|$, а его масса убывает на четыре атомные единицы. В итоге элемент смещается на две клетки к началу периодической таблицы. α -распад отображается формулой:



где ${}^A_Z X$ – ядро, испытавшее α -распад, ${}^{A-4}_{Z-2} Y$ – ядро, образовавшееся в результате α -распада.

При β -распаде заряд ядра увеличивается на $|e|$, а его масса остается практически неизменной. β -распад отображается формулой:



После β -распада ядро смещается на одну клетку к концу периодической таблицы.

γ -излучение не сопровождается изменением заряда ядра; масса ядра остается практически неизменной.

Для каждого радиоактивного вещества существует определенный интервал времени, на протяжении которого его активность (число распадов в единицу времени) убывает в 2 раза. Это интервал называется **периодом полураспада T** . За период полураспада распадается половина начального числа радиоактивных атомов.

Радиоактивный распад описывается основным законом радиоактивного распада

$$N(t) = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}, \quad (14.17)$$

где N_0 – число радиоактивных атомов в момент времени $t = 0$, $N(t)$ – число радиоактивных атомов в момент времени t , T – период полураспада. Используя формулу (14.17), можно определить количество атомов, распавшихся к моменту времени t . Оно равно

$$\Delta N = N_0 - N(t) = N_0 - N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}} = N_0 \left(1 - 2^{-\frac{t}{T}} \right).$$

При радиоактивном распаде выделяется энергия.

Исследования показали, что масса покоя ядра M_x всегда меньше суммы масс покоя составляющих его протонов и нейтронов. Если ядро содержит Z протонов и N нейтронов, то $\Delta M = Zm_p + Nm_n - M_x > 0$. Это явление называется **дефектом масс**. Следовательно, энергия системы, состоящей из Z протонов и N нейтронов, в свободном состоянии превышает энергию этой же системы, когда протоны и нейтроны образуют ядро, на $\Delta W = \Delta M c^2$. Значит, для разделения ядра на отдельные нуклоны ему сообщают некоторую энергию ΔW . Энергия, необходимая для полного разделения ядра на отдельные протоны и нейтроны, называется **энергией связи ядра W_{cb}** . Энергию связи рассчитывают по формуле:

$$W_{cb} = (Zm_p + Nm_n - M_x) c^2 \quad (14.18)$$

Энергия связи, приходящаяся на 1 нуклон (удельная энергия связи), для большинства ядер составляет порядка 8 МэВ. С увеличением массового числа удельная энергия связи медленно

убывает: более тяжелые ядра менее устойчивы по сравнению с ядрами из середины периодической таблицы.

14.7. Ядерные и термоядерные реакции

Ядерной реакцией называется изменение атомных ядер при их взаимодействии с элементарными частицами или друг с другом. Ядерные реакции происходят, когда частицы приближаются к ядру на столь малое расстояние, что попадают в сферу действия ядерных сил. Ядерные реакции, как и любые другие взаимодействия, протекают в строгом соответствии с фундаментальными законами сохранения: законом сохранения энергии, импульса, электрического заряда и некоторых других физических величин. В частности, при ядерных реакциях действует закон сохранения массовых чисел ядер до и после реакции. Например, ядерная реакция, в которой при облучении ядер азота ${}^{14}_7\text{N}$ α -частицами (ядрами атома гелия) ${}^4_2\text{He}$ образуется протон ${}^1_1\text{H}$ (ядро атома водорода) и ядро атома кислорода ${}^{17}_8\text{O}$, запишется в виде: ${}^{14}_7\text{N} + {}^4_2\text{He} \rightarrow {}^1_1\text{H} + {}^{17}_8\text{O}$. Как видно, суммы верхних индексов в правой и левой части равны в соответствии с законом сохранения массовых чисел, а суммы нижних индексов равны в соответствии с законом сохранения заряда.

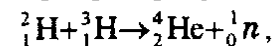
Участвующие или получающиеся в ядерных реакциях протоны, нейтроны, электроны и γ -кванты обозначают соответственно: 1_1p , 1_0n , ${}^0_{-1}e$, γ .

Энергетическим выходом ядерной реакции называется разность энергий покоя частиц до и после реакции. Если энергия покоя частиц до реакции превышает энергию покоя частиц после, то реакция идет с выделением энергии, в противном случае, ядерная реакция протекает с поглощением энергии.

Пороговая энергия ядерной реакции – это минимальная энергия налетающей частицы, при которой происходит ядерная реакция. Можно доказать (см. задачу 14.10), что пороговая энергия соответствует случаю, когда образовавшиеся в ходе реакции частицы движутся с одинаковой скоростью.

Термоядерными реакциями называются реакции слияния легких ядер при сверхвысоких температурах порядка 10^7 К. Эти реакции сопровождаются выделением энергии, поскольку масса

покоя продуктов реакции меньше суммы масс покоя взаимодействующих ядер. Пример термоядерной реакции:



где ${}^2_1\text{H}$ – дейтерий, ${}^3_1\text{H}$ – тритий, – изотопы водорода. Эта реакция протекает с выделением энергии.

14.8. Деление ядер урана. Цепная реакция. Ядерный реактор

Из всех ядерных реакций наибольший интерес представляет реакция деления ядра урана ${}^{235}_{92}\text{U}$ (или плутония ${}^{239}_{94}\text{Pu}$) при захвате им нейтрона 1_0n . Оказалось, что в результате этой реакции образуются два осколка-ядра, а также несколько нейтронов, причем суммарная масса продуктов реакции меньше массы ядра ${}^{235}_{92}\text{U}$ до реакции. Реакция идет с выделением энергии, причем при делении одного ядра ${}^{235}_{92}\text{U}$ выделяется энергия порядка 200 МэВ. При определенных условиях процесс деления ядер урана ${}^{235}_{92}\text{U}$ под действием нейтронов приобретает лавинообразный характер, в этом случае говорят о ядерной цепной реакции.

Цепная ядерная реакция может протекать при условии, если масса делящегося вещества превышает критическую массу. Если масса вещества меньше критической массы, то количество нейтронов, покидающих пространство, где происходит ядерная реакция, превышает количество нейтронов, захватываемых ядрами. В этом случае цепная реакция происходить не может. Установлено также, что вероятность захвата нейтрона ядром с последующим его делением возрастает с уменьшением скорости нейтронов. В этом случае говорят о медленных нейтронах.

Управляемая цепная ядерная реакция протекает в ядерном реакторе. Основными элементами ядерного реактора являются: ядерное горючее (${}^{235}_{92}\text{U}$, ${}^{239}_{94}\text{Pu}$, ${}^{238}_{92}\text{U}$), замедлитель нейтронов (тяжелая или обычная вода, графит), теплоноситель для вывода энергии, образующейся при работе реактора (вода) и устройство для регулирования скорости реакции (вводимые в рабочее пространство реактора стержни, содержащие кадмий или бор – вещества, которые хорошо поглощают нейтроны). Снаружи

реактор окружают защитной оболочкой, задерживающей γ -излучение и нейтроны. Оболочку выполняют из бетона с железным наполнителем.

14.9. Примеры решения задач

Задача 14.1. Масса тела, движущегося с определенной скоростью, увеличилась на 20%. Во сколько раз при этом уменьшилась его длина?

Решение.

Пусть масса покоя тела равна m_0 , а его длина, когда оно покоится – l_0 . Из формул теории относительности следует, что при движении тела со скоростью v его масса m и длина l будут равны: $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$, $l = l_0 \sqrt{1-(v/c)^2}$.

По условию задачи $m = 1,2m_0$, поэтому из первого уравнения следует, что $\sqrt{1-(v/c)^2} = m_0/m = 1/1,2$. Подставляя во второе уравнение, находим, что $l = l_0/1,2$, т.е. длина уменьшится в 1,2 раза.

Задача 14.2. Доказать, что энергия частицы W и модуль ее импульса p связаны соотношением $W^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4$, где c – скорость света, m_0 – масса покоя частицы.

Решение.

Энергия частицы $W = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$, а ее импульс

$$p = \frac{m_0v}{\sqrt{1-(v/c)^2}}. \text{ Поэтому } W^2 - p^2c^2 = \left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \right)^2 -$$

$$- \left(\frac{m_0v}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \right)^2 c^2 = \frac{m_0^2c^4}{1-(v/c)^2} - \frac{m_0^2c^2v^2}{1-(v/c)^2} = \frac{m_0^2c^2(c^2 - v^2)}{1-v^2/c^2} = m_0^2c^4.$$

Задача 14.3. Космический корабль движется со скоростью

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2}c \text{ к звезде } \alpha - \text{Центавра, расположенной на расстоянии}$$

4-х световых лет от Земли. Сколько времени займет этот межзвездный полет и сколько времени пройдет на Земле до возвращения участников полета на Землю? В обратном направлении корабль движется с той же скоростью и у звезды α - Центавра долго не задерживается.

Решение.

В астрономии часто используется в качестве единицы измерения световой год – расстояние, которое проходит свет со скоростью $c = 3 \cdot 10^8$ м/с за 1 год. Нетрудно подсчитать, что $1 \text{ св.год} = 9,5 \cdot 10^{12} \text{ км} = 9,5 \cdot 10^{15} \text{ м}$.

Если бы корабль двигался со скоростью света, то для преодоления расстояния в 4 световых года ему понадобилось бы 4 года. При движении со скоростью $v < c$ кораблю потребуется в c/v больше времени. Итак, время полета до звезды составит

$$\tau_0 = 4 \frac{c}{v} = 4 \left(\frac{c}{\frac{c\sqrt{3}}{2}} \right) = \frac{8}{\sqrt{3}} = 4,6 \text{ года. Это будет собственное}$$

время, затраченное на перелет в системе отсчета, связанной с кораблем. В системе отсчета, связанной с Землей, которая движется со скоростью v относительно системы отсчета, связанной с кораблем, пройдет

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{4,6}{1/2} = 9,2 \text{ года.}$$

Следовательно, на весь полет туда и обратно космонавты потратят время $2\tau_0 = 9,2$ года, тогда как на Земле пройдет $2\tau = 18,4$ года.

Задача 14.4. Во сколько раз увеличится масса движущегося электрона по сравнению с массой покоя, если электрон, пройдя ускоряющую разность потенциалов, приобрел кинетическую энергию $W_k = 0,76$ МэВ?

Решение.

Кинетическую энергию, приобретенную электроном, можно вычислить как разность между полной энергией $W = mc^2$ и энергией покоя $W_0 = m_e c^2 = 0,511$ МэВ.

Итак, $W_k = W - W_0 = mc^2 - m_e c^2$. После деления обеих частей уравнения на $m_e c^2$ получаем: $\frac{W_k}{m_e c^2} = \frac{m}{m_e} - 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{m}{m_e} = 1 + \frac{W_k}{m_e c^2} = 1 + \frac{W_k}{W_0} = 1 + \frac{0,76}{0,511} = 2,49.$$

Масса электрона увеличивается примерно в 2,5 раза.

Задача 14.5. Определить скорость электрона, разогнанного из состояния покоя электрическим полем с ускоряющей разностью потенциалов $|\mu| = 10^6$ В.

Решение.

Под действием ускоряющей разности потенциалов электрон приобретает кинетическую энергию $W_k = |e|\mu = 10^6$ эВ = 1 МэВ (пройдя разность потенциалов 1В, электрон приобретает энергию 1эВ, при прохождении разности потенциалов 10^6 В электрон приобретает энергию 10^6 эВ).

Как и в задаче 14.4 кинетическую энергию выразим как разность между полной энергией W и энергией покоя электрона $W_0 = m_e c^2 = 0,511$ МэВ.

$$\text{Итак, } W_k = mc^2 - m_e c^2 \Rightarrow \frac{m}{m_e} = \frac{W_k}{m_e c^2} + 1. \text{ Подставляя}$$

$$m = \frac{m_e}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \text{ и учитывая, что } m_e c^2 = W_0, \text{ получим}$$

$$\text{уравнение: } \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{W_k}{W_0} + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-(v/c)^2 = \frac{1}{\left(\frac{W_k}{W_0} + 1\right)^2} \Rightarrow (v/c)^2 = 1 - \frac{1}{\left(\frac{W_k}{W_0} + 1\right)^2} = \frac{8}{9}.$$

$$\text{Следовательно, } v = \frac{2\sqrt{2}}{3}c = 2,83 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

Задача 14.6. Электрон обладает кинетической энергией $W_k = 2$ МэВ. Определить модуль импульса электрона.

Решение.

Как и в предыдущей задаче получаем, что

$$W_k = W - W_0 = mc^2 - m_e c^2 \Rightarrow \frac{m}{m_e} = \frac{W_k}{m_e c^2} + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{2}{0,5} = 5. \text{ Но } \frac{m}{m_e} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = 5 \Rightarrow v = \frac{2\sqrt{6}}{5}c. \text{ Модуль}$$

импульса электрона вычисляется по формуле

$$p = \frac{m_e v}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = 5m_e \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5}c = 2\sqrt{6}m_e c = 1,33 \cdot 10^{-21} \text{ кг} \cdot \text{м/с}$$

Задача 14.7. Рентгеновское тормозное излучение возникает при бомбардировке быстрыми электронами металлического антикатада рентгеновской трубки. Определить длину волны коротковолновой границы спектра тормозного излучения, если скорость электронов составляет 40% от скорости света.

Решение.

Так как электрон движется со скоростью $v = 0,4c$, сравнимой со скоростью света, то его кинетическую энергию выразим как и в предыдущих задачах: $W_k = mc^2 - m_e c^2 =$
$$= \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - m_e c^2 = m_e c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - 1 \right).$$

Коротковолновая граница спектра излучения соответствует случаю, когда вся кинетическая энергия электрона переходит в энергию кванта рентгеновского излучения, равную $h\nu = h \frac{c}{\lambda}$.

Итак, получаем уравнение: $m_e c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - 1 \right) = h \frac{c}{\lambda}$.

Откуда $\lambda = \frac{h}{m_e c} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - 1 \right)^{-1} = 2,7 \cdot 10^{-11}$ м.

Задача 14.8. Радиус первой орбиты в атоме водорода $r_1 = 5,3 \cdot 10^{-11}$ м. Найти напряженность электрического поля ядра на этом расстоянии и кинетическую энергию электрона на этой орбите.

Решение.

Напряженность электрического поля найдем по формуле

$$E = k \frac{|e|}{r_1^2}, \text{ где } k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2,$$

$|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл. После подстановки числовых значений получим $E = 5,1 \cdot 10^{11}$ В/м.

Для ответа на второй вопрос запишем второй закон Ньютона, принимая во внимание тот факт, что на электрон действует кулоновская сила притяжения $F_k = k \frac{e^2}{r_1^2}$, которая

сообщает ему центростремительное ускорение $a_n = \frac{v^2}{r_1}$, где v

– скорость движения электрона. Итак, получаем уравнение

$$F_k = m_e a_n \Leftrightarrow k \frac{e^2}{r_1^2} = m_e \frac{v^2}{r_1} \Rightarrow m_e v^2 = k \frac{e^2}{r_1}.$$
 Следовательно,

кинетическая энергия электрона

$$W_k = \frac{m_e v^2}{2} = k \frac{e^2}{2r_1} = 2,17 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} = 13,6 \text{ эВ}.$$

Задача 14.9. При облучении паров ртути электронами энергия атома ртути увеличивается на 4,9эВ. Какой длины волну будет излучать атом при переходе в невозбужденное состояние?

Решение.

При переходе атома ртути в невозбужденное состояние его энергия уменьшится на $W = 4,9$ эВ, при этом атом излучит фотон с энергией W и частотой ν . Получаем уравнение:

$$W = h\nu = h \frac{c}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{W} = 2,54 \cdot 10^{-7} \text{ м}.$$

Задача 14.10. Первоначально невозбужденный водород начинает излучать фотоны, если через него пропустить пучок электронов, прошедших разность потенциалов $u_0 = 10,2$ В. Какую минимальную ускоряющую разность потенциалов должен пройти пучок протонов, чтобы при пропускании их через первоначально невозбужденный водород последний начал излучать фотоны? Считать, что масса электрона много меньше массы протона, а атом водорода перед столкновением покоился.

Решение.

Пусть масса налетающей частицы – m , ее скорость – v_0 , масса атома водорода – M , скорости частиц после столкновения – v_1 и v_2 .

По закону сохранения импульса $mv_0 = mv_1 + Mv_2$. При столкновении атом водорода поглощает энергию, равную $W_{n,k}$, поэтому по закону сохранения энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{Mv_2^2}{2} + W_{n,k}$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} mv_0 = mv_1 + Mv_2, \\ \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{Mv_2^2}{2} + W_{n,k}. \end{cases}$$

Докажем, что энергия налетающей частицы $W_0 = \frac{mv_0^2}{2}$

будет минимальна, если после столкновения частица и атом водорода движутся с одинаковыми скоростями (абсолютно неупругое столкновение). Выразим из первого уравнения системы $v_2 = \frac{mv_0 - mv_1}{M}$ и подставим во второе уравнение,

$$\text{тогда получим: } \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{M}{2} \left(\frac{mv_0 - mv_1}{M} \right)^2 + W_{n,k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{m^2 v_0^2}{2M} - \frac{m^2 v_0 v_1}{M} + \frac{m^2 v_1^2}{2M} + W_{n,k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} \left(1 - \frac{m}{M} \right) = \frac{mv_1^2}{2} \left(1 + \frac{m}{M} \right) - \frac{m^2 v_0 v_1}{M} + W_{n,k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} \left(\frac{M-m}{M} \right) = \frac{mv_1^2}{2} \left(\frac{m+M}{M} \right) - \frac{m^2 v_0}{M} v_1 + W_{n,k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_0 = \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} \left(\frac{M+m}{M-m} \right) - \frac{m^2 v_0}{(M-m)} v_1 + \frac{M}{(M-m)} W_{n,k}$$

Таким образом, энергия налетающей частицы W_0 выражена как квадратичная функция от v_1 с первым положительным коэффициентом $a = \frac{m}{2} \cdot \left(\frac{M+m}{M-m} \right) > 0$. Такая функция имеет минимум в точке $v_1 = -b/2a$, где

$$b = \frac{m^2 v_0}{(M-m)}. \text{ Итак, скорость, соответствующая минимуму } W_0$$

$$v_1 = + \frac{(m^2 v_0 / (M-m))}{2(m/2)((M+m)/(M-m))} = \frac{mv_0}{(M+m)}$$

$$\text{При этом } v_2 = \frac{mv_0 - mv_1}{M} = \frac{m \left(v_0 - \frac{mv_0}{M+m} \right)}{M} = \frac{mv_0}{(M+m)}$$

Итак, доказано, что энергия налетающей частицы минимальна, если после столкновения частицы движутся с одинаковыми скоростями, т.е. $v_1 = v_2$. Минимальное значение энергии налетающей частицы

$$W_0 = W_{\min} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{Mv_1^2}{2} + W_{n,k} = \frac{(m+M)v_1^2}{2} + W_{n,k} =$$

$$= \frac{(m+M) \left(\frac{mv_0}{M+m} \right)^2}{2} + W_{n,k} = \frac{mv_0^2}{2} \left(\frac{m}{m+M} \right) + W_{n,k} =$$

$$= W_{\min} \frac{m}{m+M} + W_{n,k} \Rightarrow W_{\min} - W_{\min} \frac{m}{m+M} = W_{n,k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_{\min} = W_{n,k} \left(1 + \frac{m}{M} \right)$$

В случае, когда через водород пропускают электроны, $\frac{m}{M} \rightarrow 0$,

поэтому $W_{\min} = W_{n,k}$, т.е. вся энергия электронов поглощается водородом, который переходит в возбужденное состояние. Электроны приобретают энергию, пройдя ускоряющую разность потенциалов u_0 , т.е. $W_{\min} = |e|u_0 = W_{n,k} = 10,2 \text{ эВ}$.

В случае, когда через водород пропускают протоны, отношение $\frac{m}{M} = 1$, поэтому минимальная энергия налетающих протонов

$W'_{\min} = W_{n,k} (1+1) = 2W_{n,k} = 20,4 \text{ эВ}$. Таким образом, минимальная ускоряющая разность потенциалов для протонов равна 20,4 В.

Задача 14.11. Какие спектральные линии появятся при возбуждении атомарного водорода электронами с энергией $W = 12,1$ эВ?

Решение.

В задаче 14.10 было показано, что вся энергия электронов поглощается водородом, который возбуждается и переходит из основного энергетического состояния с $n=1$ в некоторое состояние, характеризуемое натуральным числом k . По закону сохранения энергии $W = W_k - W_n$. С другой стороны, было показано (см. формулу 14.16), что

$W_k - W_n = W_{\text{ион}} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right)$, где $W_{\text{ион}} = 13,6$ эВ. Получаем уравнение:

$$W = W_{\text{ион}} \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) \Rightarrow 1 - \frac{1}{k^2} = \frac{W}{W_{\text{ион}}} \Rightarrow \frac{1}{k^2} = 1 - \frac{W}{W_{\text{ион}}} = 1 - \frac{12,1 \text{ эВ}}{13,6 \text{ эВ}} = 0,11 \Rightarrow k^2 = \frac{1}{0,11} = 9,09 \Rightarrow k = 3 \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Из состояния с $k=3$ возможен прямой переход в состояние с $n=1$ или $n=2$, а также переход со второго энергетического уровня на первый. Таким образом, получится три спектральных линии. Рассчитываем соответствующие длины волн, используя формулу:

$$h\nu_{k,n} = W_{\text{ион}} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right) \Rightarrow \nu_{k,n} = \frac{W_{\text{ион}}}{h} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right) \Rightarrow \lambda_{k,n} = \frac{c}{\nu_{k,n}} = \frac{ch}{W_{\text{ион}} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right)}$$

Переходу из состояния с $k=3$ в состояние с $n=1$ соответствует спектральная линия с длиной волны

$$\lambda_{3,1} = \frac{ch}{W_{\text{ион}} \left(1 - \frac{1}{3^2} \right)} = 1,03 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

Переходу из состояния с $k=3$ в состояние с $n=2$ соответствует спектральная линия с длиной волны

$$\lambda_{3,2} = \frac{ch}{W_{\text{ион}} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right)} = 6,6 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

Переходу из состояния с $k=2$ в состояние с $n=1$ соответствует спектральная линия с длиной волны

$$\lambda_{2,1} = \frac{ch}{W_{\text{ион}} \left(1 - \frac{1}{2^2} \right)} = 1,22 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

Задача 14.12. Напряженность электрического поля в электромагнитной волне с частотой $\omega = 2 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}$, модулированной по амплитуде с частотой $\Omega = 2 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$, меняется со временем по закону: $E = A(1 + \cos \Omega t) \cos \omega t$, где A – постоянная. Определить энергию электронов, выбиваемых этой волной из атомов газообразного водорода с энергией ионизации $W_{\text{ион}} = 13,6$ эВ.

Решение.

Преобразуем выражение для напряженности электрического поля, используя формулы:

$$E = A(1 + \cos \Omega t) \cos \omega t = A \cos \omega t + A \cos \Omega t \cos \omega t = A \cos \omega t + \frac{1}{2} A \cos(\omega - \Omega)t + \frac{1}{2} A \cos(\omega + \Omega)t.$$

Таким образом, модулированная по амплитуде волна представляет собой сумму трех монохроматических волн с частотами ω , $\omega_1 = (\omega - \Omega)$ и $\omega_2 = (\omega + \Omega)$. В соответствии с постулатами Бора атом водорода может излучать и поглощать электромагнитную энергию только определенными порциями (квантами). Вычислим кванты энергии, соответствующие найденным монохроматическим волнам.

Для волны с частотой ω :

$$W = h\nu = h \frac{\omega}{2\pi} = 2,1 \cdot 10^{-18} \text{ Дж.}$$

Для волны с частотой $\omega_1 = (\omega - \Omega)$:

$$W_1 = h\nu_1 = h \frac{\omega_1}{2\pi} = 1,89 \cdot 10^{-18} \text{ Дж.}$$

Для волны с частотой $\omega_2 = (\omega + \Omega)$:

$$W_2 = h\nu_2 = h \frac{\omega_2}{2\pi} = 2,31 \cdot 10^{-18} \text{ Дж.}$$

Энергия ионизации атома водорода $W_{\text{ион}} = 13,6 \text{ эВ} = 2,168 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}$, и как видно, она больше, чем W и W_1 . Поэтому кванты с частотами ω и $(\omega - \Omega)$ не могут ионизировать атом водорода. Ионизацию вызывает только квант с частотой $(\omega + \Omega)$, и по закону сохранения энергии энергия выбитых этим квантом электронов

$$W_e = W_2 - W_{\text{ион}} = 0,142 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} = 0,88 \text{ эВ.}$$

Задача 14.13. В периодической таблице рядом расположены три элемента X, Y, S. Радиоактивный изотоп элемента X превращается в элемент Y, а тот, в свою очередь, — в элемент S. Последний превращается в изотоп исходного элемента X. Какими процессами обусловлены переходы $X \rightarrow Y$, $Y \rightarrow S$, $S \rightarrow X$?

Решение.

Заряд ядра элемента Y на 1 элементарный заряд больше, чем заряд ядра элемента X (по условию задачи в периодической таблице эти элементы расположены рядом). Следовательно, переход $X \rightarrow Y$ есть β -распад. По аналогии переход $Y \rightarrow S$ — также β -распад. В процессе $S \rightarrow X$ заряд ядра уменьшается на 2 элементарных заряда, следовательно, это α -распад.

Задача 14.14. Ядро нептуния ${}_{93}^{237}\text{Np}$ после ряда α - и β -распадов превращается в ядро висмута ${}_{83}^{209}\text{Bi}$. Какое число α - и β -распадов происходит при этом?

Решение.

В результате распадов массовое число изменяется на $237 - 209 = 28$ атомных единиц. Как известно, при β -распаде масса ядра не изменяется, следовательно, изменение массового

числа происходит только за счет α -распадов. При одном α -распаде массовое число изменяется на 4 атомные единицы, значит, должно произойти $28/4 = 7$ α -распадов. При этом заряд ядра должен уменьшиться на $7 \cdot 2 = 14$ элементарных зарядов. В нашем случае уменьшение заряда ядра равно $93 - 83 = 10$. Следовательно, в результате β -распадов заряд увеличился на $14 - 10 = 4$ элементарных заряда. Так как при одном β -распаде заряд ядра увеличивается на 1 элементарный заряд, то должно произойти $4/1 = 4$ β -распада.

Задача 14.15. Активность радиоактивного препарата за $t_1 = 24$ ч уменьшилась в 8 раз. Найти период полураспада T этого препарата. Определить, какая часть радиоактивных ядер этого препарата распадется за время, равное четвертой части периода полураспада?

Решение.

Как известно, активность радиоактивного препарата есть число распадов в единицу времени. Очевидно, что число распадов пропорционально количеству нераспавшихся ядер в данный момент времени. Поэтому из условия уменьшения активности в 8 раз следует, что во столько же раз уменьшилось число нераспавшихся ядер: $N(t_1)$. Итак, $\frac{N_0}{N(t_1)} = 8$. Выражаем

из закона радиоактивного распада $N(t_1) = N_0 \cdot 2^{-\frac{t_1}{T}}$, где T — период полураспада. Следовательно, $\frac{N_0}{N_0 \cdot 2^{-\frac{t_1}{T}}} = 8 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2^{\frac{t_1}{T}} = 8 \Rightarrow \frac{t_1}{T} = 3 \Rightarrow T = \frac{t_1}{3} = 8 \text{ ч.}$$

Для ответа на второй вопрос задачи рассмотрим момент времени $t_2 = \frac{1}{4}T$ от начала наблюдения за препаратом. Количество нераспавшихся ядер в этот момент равно

$$N(t_2) = N_0 \cdot 2^{-\frac{t_2}{T}} = N_0 \cdot 2^{-\frac{1}{4}} = \frac{N_0}{\sqrt[4]{2}}.$$

Следовательно, к этому моменту распалось $\Delta N = N_0 - N(t_2) =$

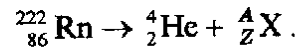
$$= N_0 - \frac{N_0}{\sqrt[4]{2}} = N_0 \left(1 - \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) \text{ ядер.}$$

Отношение к начальному числу ядер $\frac{\Delta N}{N_0} = 1 - \frac{1}{\sqrt[4]{2}} = 0,16.$

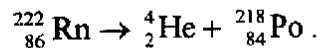
Задача 14.16. Радон ${}^{222}_{86}\text{Rn}$ – это α -радиоактивный газ с атомной массой $A = 222$. Какую долю полной энергии, освобождаемой при распаде радона, уносит α -частица? Считать, что до распада ядро радона покоится.

Решение.

Радон распадается на α -частицу и неизвестный элемент ${}^A_Z\text{X}$ так, что распад записывается в виде:



По законам сохранения заряда и массового числа порядковый номер элемента $Z = 86 - 2 = 84$ и его атомная масса $A = 222 - 4 = 218$. В периодической таблице находим, что этим элементом является полоний ${}^{218}_{84}\text{Po}$, и окончательно распад радона записывается в виде:



Пусть m – масса α -частицы, а M – масса ядра полония, v_α и v_{Po} – соответственно их скорости после распада. Начальный импульс системы по условию задачи равен нулю, конечный импульс равен $mv_\alpha - Mv_{\text{Po}}$ (очевидно, что α -частица и ядро ${}^{218}_{84}\text{Po}$ разлетаются в противоположные стороны, отсюда и появляется знак «-»).

По закону сохранения импульса: $0 = mv_\alpha - Mv_{\text{Po}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{v_{\text{Po}}}{v_\alpha} = \frac{m}{M}.$$

Энергия, которой обладает система, складывается из кинетических энергий α -частицы и полония, т.е.

$$W = \frac{mv_\alpha^2}{2} + \frac{Mv_{\text{Po}}^2}{2}.$$

Следовательно, α -частица уносит долю энергии, равную

$$\frac{\frac{mv_\alpha^2}{2}}{\frac{mv_\alpha^2}{2} + \frac{Mv_{\text{Po}}^2}{2}} = \frac{1}{1 + M/m \cdot (v_{\text{Po}}/v_\alpha)^2} = \frac{1}{1 + M/m \cdot (m/M)^2} = \frac{1}{1 + m/M} = \frac{1}{1 + 4/218} = 0,98 \text{ или } 98\%.$$

Задача 14.17. В калориметр с теплоемкостью $c = 100$ Дж/К помещен образец радиоактивного кобальта с молярной массой $\mu = 61 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Масса образца $m = 10$ мг. При распаде одного ядра кобальта выделяется энергия $W = 2 \cdot 10^{-19}$ Дж. Через время $\tau = 50$ мин температура калориметра повысилась на $\Delta t = 0,06^\circ\text{C}$. Каков период полураспада кобальта?

Решение.

Повышение температуры калориметра определяется выделением энергии Q при распаде атома кобальта. Эту энергию можно рассчитать как $Q = c\Delta t$, а с другой стороны, как $\Delta N W$, где ΔN – число распавшихся за время τ ядер, которое определяется из закона радиоактивного распада:

$$\Delta N = N_0 - N(t) = N_0 - N_0 \cdot 2^{-\frac{\tau}{T}} = N_0 \left(1 - 2^{-\frac{\tau}{T}}\right),$$

где N_0 – первоначальное количество радиоактивных атомов.

Найдем его, определив количество вещества $\nu = \frac{m}{\mu}$.

Следовательно, $N_0 = N_A \nu = N_A \frac{m}{\mu}$, где N_A – число Авогадро.

Итак, имеем уравнение:

$$c\Delta t = \Delta N W \Rightarrow c\Delta t = N_A \frac{m}{\mu} \left(1 - 2^{-\frac{\tau}{T}}\right) W \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - 2^{-\frac{\tau}{T}} = \frac{c\Delta t}{N_A \frac{m}{\mu} W} = \frac{c\Delta t \mu}{N_A m W} \Rightarrow 2^{-\frac{\tau}{T}} = 1 - \frac{c\Delta t \mu}{N_A m W} \Rightarrow$$

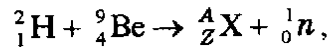
$$\Rightarrow -\frac{\tau}{T} = \log_2 \left(1 - \frac{c\Delta t \mu}{N_A m W}\right).$$

$$T = -\tau / \log_2 \left(1 - \frac{c\Delta t \mu}{N_A m W}\right) \approx 5700 \text{ с} \approx 95 \text{ мин.}$$

Задача 14.18. При взаимодействии атома дейтерия с ядром бериллия ${}^9_4\text{Be}$ испускается нейтрон. Написать ядерную реакцию.

Решение.

Дейтерий – это изотоп водорода, ядро которого помимо протона содержит один нейтрон. Ядро дейтерия обозначается ${}^2_1\text{H}$. Ядерная реакция записывается следующим образом:



где ${}^A_Z\text{X}$ – ядро некоторого элемента, образующегося в реакции. Используя закон сохранения заряда, ходим, что $Z = 5$. Из закона сохранения массового числа $A = (2 + 9) - 1 = 10$. В периодической таблице порядковый номер $Z = 5$ имеет элемент бор В. Окончательный вид реакции: ${}^2_1\text{H} + {}^9_4\text{Be} \rightarrow {}^{10}_5\text{B} + {}^1_0\text{n}$.

Задача 14.19. Ядро какого элемента получается при взаимодействии нейтрона с протоном, сопровождающимся выделением γ -кванта? Написать реакцию.

Решение.

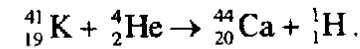
Ядерная реакция записывается в виде ${}^1_0\text{n} + {}^1_1\text{p} \rightarrow {}^A_Z\text{X} + \gamma$, где ${}^A_Z\text{X}$ – ядро элемента, образующегося в реакции. По закону

сохранения заряда и массового числа $Z = 1, A = 2$. В ходе реакции получается дейтерий ${}^2_1\text{H}$. Окончательный вид реакции: ${}^1_0\text{n} + {}^1_1\text{p} \rightarrow {}^2_1\text{H} + \gamma$.

Задача 14.20. Написать недостающие обозначения в ядерной реакции ${}^{41}_{19}\text{K} + \dots \rightarrow {}^{44}_{20}\text{Ca} + {}^1_1\text{H}$.

Решение.

При протекании ядерных реакций выполняется закон сохранения заряда и массовых чисел. Следовательно, заряд неизвестного ядра в левой части ядерной реакции $Z = (20 + 1) - 18 = 2$, а массовое число $A = (44 + 1) - 41 = 4$. Отсюда следует, что неизвестно ядро – ядро атома гелия ${}^4_2\text{He}$ (α -частица). Ядерная реакция записывается в виде:



Задача 14.21. Вычислить энергию связи ядра атома алюминия.

Решение.

Напомним, что в атомной физике масса выражается в атомных единицах массы, причем $1 \text{ а.е.м.} = 1,6606 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$, соответствующая ей энергия:

$$W = mc^2 = 1,6606 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \left(3 \cdot 10^8 \text{ м/с}\right)^2 = 14,9454 \cdot 10^{-9} \text{ Дж} =$$

$$= 931 \text{ МэВ.}$$

Ядро ${}^{27}_{13}\text{Al}$ содержит $Z = 13$ протонов и $N = A - Z = 14$ нейтронов. Масса протона составляет $1,0078$ а.е.м., а масса нейтрона – $1,0087$ а.е.м. Масса всех нуклонов ядра равна $(13 \cdot 1,0078 + 14 \cdot 1,0087)$ а.е.м. = $27,2232$ а.е.м. Масса ядра ${}^{27}_{13}\text{Al}$ – $26,9815$ а.е.м. Дефект масс $\Delta m = (27,2232 - 26,9815) =$
 $= 0,2417$ а.е.м.

$$\text{Энергия связи } W_{\text{св}} = \Delta m \cdot W = 0,2417 \cdot 931 =$$

$$= 225 \text{ МэВ.}$$

Задача 14.22. Какое количество урана ${}_{92}^{235}\text{U}$ расходуется в сутки на атомной электростанции мощностью $P = 5 \cdot 10^3$ кВт? Коэффициент полезного действия $\eta = 17\%$. При распаде одного ядра ${}_{92}^{235}\text{U}$ выделяется энергия $W_0 = 200$ МэВ.

Решение.

За сутки электростанция вырабатывает полезную энергию $W_n = Pt$, где $t = 24$ ч = 86400 с. Затраченная энергия W_3 — это энергия, выделившаяся в результате управляемой цепной реакции, при которой происходит распад ядер урана ${}_{92}^{235}\text{U}$. Пусть за сутки расходуется масса m урана. В ней содержится

$N = \frac{m}{\mu} N_A$ атомов. Здесь $\mu = 235 \cdot 10^{-3}$ кг/моль — молярная

масса, $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ 1/моль — число Авогадро. Следовательно, за сутки выделяется энергия

$W_3 = N W_0 = \frac{m}{\mu} N_A W_0$. Из определения КПД:

$$\eta = \frac{W_n}{W_3} = \frac{Pt}{\frac{m}{\mu} N_A W_0} \Rightarrow m = \frac{Pt\mu}{\eta N_A W_0} =$$

$= 0,031$ кг.

Задача 14.23. Термоядерная реакция

${}^2_1\text{H} + {}^3_2\text{He} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^1_1\text{p}$ идет с выделением энергии $Q_1 = 18,4$ МэВ. Какая энергия выделяется в реакции

${}^3_2\text{He} + {}^3_2\text{He} \rightarrow {}^4_2\text{He} + 2{}^1_1\text{p}$. если дефект масс ядра ${}^3_2\text{He}$ на $\Delta m = 0,006$ а.е.м. больше, чем у ядра ${}^2_1\text{H}$? Какая энергия выделится во второй реакции при синтезе 1 кг гелия?

Решение.

Пусть m_p — масса протона, m_n — масса нейтрона, m_1 — масса ядра ${}^3_2\text{He}$, m_2 — масса ядра ${}^2_1\text{H}$. Дефект масс у ядра ${}^3_2\text{He}$, содержащего 2 протона и 1 нейтрон,

$\Delta m_1 = (2m_p + m_n) - m_1$. Дефект масс у ядра ${}^2_1\text{H}$, содержащего 1 протон и 1 нейтрон, $\Delta m_2 = (m_p + m_n) - m_2$. По условию задачи

$$\Delta m = \Delta m_1 - \Delta m_2 = (2m_p + m_n) - m_1 - (m_p + m_n) + m_2 = m_p - (m_1 - m_2).$$

Следовательно, $m_1 - m_2 = m_p - \Delta m$.

Пусть m_3 — масса ядра гелия ${}^4_2\text{He}$, тогда энергетический выход первой ядерной реакции

$$Q_1 = ((m_1 + m_2) - (m_3 + m_p))c^2.$$

Энергетический выход второй ядерной реакции

$$Q_2 = (2m_1 - (m_3 + 2m_p))c^2.$$

Следовательно, $Q_2 - Q_1 = ((m_1 - m_2) - m_p)c^2$. Учитывая, что $m_1 - m_2 = m_p - \Delta m$, получаем, что $Q_2 - Q_1 = -\Delta mc^2$.

Отсюда $Q_2 = Q_1 - \Delta mc^2$. Так как 1 а.е.м. соответствует энергия 931 МэВ, то $\Delta mc^2 = 0,006 \cdot 931 = 5,6$ МэВ и $Q_2 = 18,4 - 5,6 = 12,8$ МэВ.

Итак, во второй реакции при синтезе одного ядра гелия ${}^4_2\text{He}$ выделяется энергия $Q_2 = 12,8$ МэВ. 1 кг гелия содержит $\nu = \frac{1 \text{ кг}}{4 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}} = 0,25 \cdot 10^3$ молей и, следовательно,

содержит $N = \nu N_A = 0,25 \cdot 10^3 \cdot 6,02 \cdot 10^{23} = 1,5 \cdot 10^{26}$ атомов гелия. Поэтому при синтезе 1 кг гелия во второй реакции выделится энергия

$$W = Q_2 N = 19,2 \cdot 10^{26} \text{ МэВ} = 19,2 \cdot 10^{32} \text{ эВ} = 3,1 \cdot 10^{14} \text{ Дж}.$$

Задача 14.24. При распаде нейтральной частицы образовалось два фотона, летящих под углами α и β к направлению движения частицы. Определить скорость распавшейся частицы (рис. 14.1).

Решение.

Пусть W_0 – энергия частицы, а W_1 и W_2 – энергии образовавшихся фотонов. По закону сохранения энергии $W_0 = W_1 + W_2$. Пусть масса покоя частицы – m_0 , тогда

$$W_0 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \text{ где } v \text{ – скорость частицы.}$$

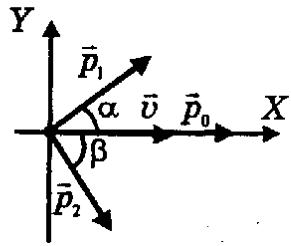


Рис. 14.1

При распаде частицы выполняется также закон сохранения импульса. Если \vec{p}_0 – импульс частицы, а \vec{p}_1 и \vec{p}_2 – импульсы фотонов, то выполняется векторное равенство $\vec{p}_0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$. Введем координатные оси X и Y , как показано на рис. 14.1 и

спроецируем векторное равенство на эти оси. Получим два уравнения: по оси Y : $p_1 \sin \alpha - p_2 \sin \beta = 0$, по оси X :

$$p_0 = p_1 \cos \alpha + p_2 \cos \beta. \text{ Отметим, что } p_0 = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \text{ а}$$

импульсы фотонов равны $p_1 = \frac{W_1}{c}$ и $p_2 = \frac{W_2}{c}$. После подстановок получаем систему из трех уравнений:

$$\begin{cases} W_1 + W_2 = W_0, \\ \frac{W_1}{c} \sin \alpha = \frac{W_2}{c} \sin \beta, \\ \frac{W_1}{c} \cos \alpha + \frac{W_2}{c} \cos \beta = p_0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} W_1 + W_2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \\ W_1 \sin \alpha = W_2 \sin \beta, \\ W_1 \cos \alpha + W_2 \cos \beta = \frac{m_0 v c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}. \end{cases}$$

Из второго уравнения $W_2 = W_1 \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$. Подставляя в третье

уравнение, получаем

$$W_1 \cos \alpha + W_1 \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cos \beta = \frac{m_0 v c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow W_1 \frac{\sin \beta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \beta}{\sin \beta} &= \frac{m_0 v c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \Rightarrow W_1 \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta} = \\ &= \frac{m_0 v c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \Rightarrow W_1 = \frac{m_0 v c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \Rightarrow \\ \Rightarrow W_2 &= \frac{m_0 v c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}. \end{aligned}$$

Подставляя найденные значения в первое уравнение системы, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{m_0 v c}{\sqrt{1 - (v/c)^2} \sin(\alpha + \beta)} (\sin \alpha + \sin \beta) &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \Rightarrow \\ \Rightarrow v &= \frac{c \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha + \sin \beta}. \end{aligned}$$